Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. F. Loebbert, B.Sc. J. Miczajka

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2015

---

ÜBUNGSBLATT 9, Abgabe am Do. 25.06.14 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 26.06.14.

## 1 Ehrenfest-Theorem für den harmonischen Oszillator (7 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) .$$

Der Ortsoperator drückt sich durch die Leiteroperatoren wie folgt aus:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( \hat{a}_+ + \hat{a}_- \right) .$$

Angenommen, das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Überlagerungszustand

$$|\Psi(0)\rangle = C\Big( |\psi_0\rangle + \hat{a}_+ |\psi_0\rangle \Big) ,$$

wobei $|\psi_0\rangle$ der normierte Grundzustand ist.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C$ und geben Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ für alle späteren Zeiten an.

(b) Berechnen Sie den Energieerwartungswert $\langle E \rangle$ des Systems im Zustand $|\Psi(t)\rangle$.

(c) Berechnen Sie den (zeitabhängigen) Ortserwartungswert $\langle x \rangle(t)$ für $|\Psi(t)\rangle$.

(d) Zeigen Sie, dass $\langle x \rangle(t)$ die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Masse $m$ im Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ löst.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

## 2 Unschärfe für den harmonischen Oszillator (6 Punkte)

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle p \rangle$ and $\langle p^2 \rangle$ für die Energieeigenzustände $|\psi_n\rangle$ des harmonischen Oszillators ähnlich der Berechnung von $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ in der Vorlesung. Berechnen Sie dann das Produkt der Unschärfen (Standardabweichungen)

$$\Delta x \, \Delta p \, .$$

Zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist. Wie nah liegen diese Zustände an der minimalen Unschärfe?

## 3 Kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators (7 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega$. Sei $z$ eine gegebene komplexe Zahl, die den Anfangszustand

$$|\Psi(0)\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}_+} |\psi_0\rangle \tag{1}$$

bestimmt. Hierbei ist $|\psi_0\rangle$ der Grundzustand des Oszillators. Das Exponential des Aufsteigeoperators $\hat{a}_+$ ist definiert über die Taylorreihe

$$e^{z\hat{a}_+} = \hat{\mathbb{1}} + z\hat{a}_+ + \frac{1}{2} z^2 \hat{a}_+^2 + \ldots + \frac{1}{n!} z^n \hat{a}_+^n + \ldots \, .$$

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine der möglichen Energien $E_n$ des harmonischen Oszillators für den Zustand (1) zu messen? Überprüfen Sie, ob die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins ist.

(b) Für diesen Anfangszustand, geben Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ für beliebige Zeiten $t > 0$ an.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Energie $E_n$ für den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ zu einer beliebigen Zeit $t_1 > 0$ zu messen? Wie lautet der Zustand nachdem die Messung bei $t_1$ durchgeführt wurde?