



ÜBUNGSBLATT 12, Abgabe am Do. 16.07.15 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 17.07.15.

1 Elektron im Kern (7 Punkte)

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Elektron im Grundzustand sich innerhalb des Protons in einem Wasserstoffatom befindet. Nehmen Sie an, dass der Radius des Protons r_0 wesentlich kleiner als der Bohrsche Radius a_B ist, so dass $e^{-r/a_B} \approx 1$ für $0 \leq r \leq r_0$. Geben Sie den Zahlenwert für diese Wahrscheinlichkeit für $r_0 = 10^{-15}$ m an? Wie groß ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit, falls sich das Elektron im ψ_{210} Zustand befindet?

2 Störungstheorie (7 Punkte)

Das Energiespektrum und die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators mit Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right)$$

sind gegeben durch

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad |\psi_n^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_+^n |\psi_0^{(0)}\rangle,$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$. Schätzen Sie die Verschiebungen ΔE_n der Energieniveaus des harmonischen Oszillators ab, die sich durch Hinzufügen der Störung

$$\Delta \hat{H} = \lambda \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} \hat{x}^4$$

ergeben. Beurteilen Sie die Güte Ihrer Abschätzung indem Sie überprüfen, ob ΔE_n klein gegenüber E_n ist.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 Feinstruktur (6 Punkte)

- (a) Benutzen Sie die Formeln für die Korrektur des Coulomb-Spektrums aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung, $\Delta E_{\text{SB},nlj}$, der relativistischen Energie des Elektrons, $\Delta E_{\text{kin},nl}$, und der Zitterbewegung des Elektrons, $\Delta E_{\text{Zitter},n}$, und zeigen Sie, dass die Summe dieser drei Korrekturen unabhängig von der Drehimpulsquantenzahl ℓ ist und als

$$\Delta E_{\text{FS},nj} = E_n^{(0)} \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)$$

geschrieben werden kann.

- (b) Zeigen Sie, dass die Feinstrukturkorrektur für keine möglichen Werte der Quantenzahlen n und j verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung gegenüber den Coulomb-Energien führt.