Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2018

ÜBUNGSBLATT 1, Abgabe am Do. 26.04.18 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 27.04.18.

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung, diskrete Zufallsvariable (6 Punkte)

Sei a eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte 0,1,2,3 annehmen kann und damit den Ausgang eines Experiments angibt. Ihr Assistent führt das Experiment wiederholt durch und misst dabei die folgenden Häufigkeiten:

a	0	1	2	3
n_a	9	6	?	4

Leider kann er sich an n_2 nicht mehr erinnern. Allerdings weiß er noch, dass die Varianz der gemessenen Verteilung $\sigma_a^2 = 1{,}2 = \frac{6}{5}$ beträgt. Finden Sie den Mittelwert $\langle a \rangle$ der Verteilung.

Tipp: Benutzen Sie einen Taschenrechner und runden Sie keine Zwischenergebnisse.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung, kontinuierliche Zufallsvariable
$(2 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 14$ Punkte)

Die Schwingung eines Federpendels mit Amplitude A und Kreisfrequenz ω wird beschrieben durch die Funktion

$$x(t) = A \cos \omega t \; .$$

Der Pendelkörper schwingt zwischen den Punkten $x = \pm A$ hin und her. Nehmen wir an, Sie schauen zu einem zufälligen Zeitpunkt t auf das Pendel, d.h. die Zufallsvariable t ist gleichverteilt $\rho_c(t) = \text{konst.}$

(i) Überlegen Sie sich, auf welches Zeitintervall $[t_1, t_2]$ Sie die Betrachtung aufgrund der Periodizität und der Symmetrie des Schwingungsvorgangs reduzieren können. Berechnen Sie für dieses Intervall den konstanten Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho_c(t)$.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

(ii) Sei x die Zufallsvariable, die den Ort des Pendelkörpers zur Zeit t angibt. Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ mit Hilfe der Beziehung

$$|\rho_{\mathrm{c}}(t)\,\mathrm{d}t| = |\rho(x)\,\mathrm{d}x| \ .$$

Tipp: Es gilt $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

(iii) Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$.

(iv) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x\rangle$ und die Varianz σ_x^2 der Verteilung.

(v) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Pendelkörper im Intervall $-\frac{A}{2} \le x \le \frac{A}{2}$ befindet?

(vi) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich *genau* am Punkt $\frac{A}{2}$ befindet?

Es gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\ , \quad \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0\ , \quad \int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\ , \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3}\ .$$