Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2018

ÜBUNGSBLATT 4, Abgabe am Do. 17.05.18 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Fr. 18.05.18.

1 **Zerfließen** ($3 + 3 = 6$ Punkte)

Gegeben sei ein freies Teilchen ohne mittleren Impuls, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ durch eine Gaußfunktion beschrieben ist. Die Ortsunschärfe sei zum Zeitpunkt $t = 0$ minimal und gegeben durch die Standardabweichung

$$\sigma_x = 1\,\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\,\mathrm{m}\ .$$

a) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Ortsunschärfe auf das Doppelte angewachsen ist

   (i) für ein Elektron, dessen Masse ungefähr $m_e \approx 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ beträgt,

   (ii) für ein Staubkorn der Masse $m_s \approx 1\,\mathrm{g}$.

b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Zeit Δt_n an, die es dauert, bis die Unschärfe auf das n-fache des ursprünglichen Wertes σ_x angewachsen ist. Schreiben Sie die Formel für allgemeines σ_x und allgemeine Masse m auf.

Hinweis: Sie dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung zitieren, ohne sie erneut herzuleiten.

2 **Folge von Partialwellen** ($3 + 5 = 8$ Punkte)

Ein freies Teilchen sei in einem Superpositionszustand aus Partialwellen mit den Wellenzahlen

$$k_1\,,\quad k_2 = 2k_1\,,\quad k_3 = 3k_1\,,\quad k_4 = 4k_1\,,\quad k_5 = 5k_1\,,\quad \ldots\ ,$$

d.h. die Vielfachen von k_1 sind mögliche Messwerte für die Wellenzahl. Die Wahrscheinlichkeit k_1 zu messen sei ρ_1. Die Wahrscheinlichkeit für die Vielfachen nimmt jeweils um den Faktor $\frac{1}{2}$ ab, also

$$\rho_1\,,\quad \rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1\,,\quad \rho_3 = \frac{1}{2^2}\rho_1\,,\quad \rho_4 = \frac{1}{2^3}\rho_1\,,\quad \rho_5 = \frac{1}{2^4}\rho_1\,,\quad \ldots\ ,$$

a) Nehmen Sie an, dass die Amplituden aller Partialwellen reell und positiv sind. Bezeichnen Sie die Amplitude der ersten Partialwelle mit A_1. Geben Sie die Amplituden der anderen Partialwellen als Vielfaches von A_1 an.

b) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x,0)$ für die Zeit $t = 0$ und zeigen Sie, dass die daraus resultierende Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\rho(x,0) = \frac{2A_1^2}{3 - 2\sqrt{2}\cos k_1 x}$$

gegeben ist.

Tipp: Der Wert der geometrischen Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Bem.: Die Wellenfunktion ist nicht normierbar, ähnlich einer einzelnen Partialwelle.

3 **Fourier-Transformation** (1 + 5 = 6 Punkte)

Es sei bekannt, dass die Wellenfunktion eines Teilchens durch die Amplitudenfunktion

$$A(k) = A_0 \cdot \begin{cases} \kappa + k & -\kappa < k < 0 \\ \kappa - k & 0 < k < \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben ist. Hierbei seien A_0 und κ reell und positiv.

(a) Zeichnen Sie $A(k)$.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Wellenfunktion $\Psi(x,0)$ zur Zeit $t = 0$.

Tipp: Partielle Integration