Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

Pk6 Quantenmechanik SS 2018

Übungsblatt 5, Abgabe am Do. 24.05.18 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Fr. 25.05.18.

1 **Bohrsches Atommodell** $(3 + 1 + 1 + 1 = 6$ Punkte)

Nach dem Bohrschen Atommodell umkreisen die Elektronen den Atomkern wie Planeten die Sonne. In dieser Aufgabe sollen Sie abschätzen, ob die Heisenbergsche Unschärferelation mit dieser Vorstellung einverstanden ist.

a) Die möglichen Bahnradien r_n und die dazugehörigen Geschwindigkeiten v_n mit $n = 1,2,3,\ldots$ berechnen sich nach Bohr wie folgt: zum einen setzt man die Coulomb-Kraft $F_{\mathrm{C}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$ gleich der Zentipetalkraft $F_{\mathrm{Z}} = m\frac{v_n^2}{r_n}$. Zum anderen fordert man, dass die de Broglie Wellenlänge $\lambda_n = \frac{h}{mv_n}$ des Elektrons genau n-Mal in den Umfang $U_n = 2\pi r_n$ seiner Umlaufbahn passt. Stellen Sie diese beiden Gleichungen auf und leiten Sie daraus eine Formel für die Bohrradien r_n ab.

b) Damit man von "umkreisen [...] wie Planeten" sprechen kann, sollte die Ortsunschärfe Δx_n entlang der Bahn vielleicht nicht mehr als den halben Umfang betragen

$$\Delta x_n \lesssim U_n/2 \,.$$

Die Geschwindigkeitsunschärfe Δv_n führt mit der Zeit ebenfalls zu einer Ortsunschärfe. Sagen wir T_n sei die Zeit, nach der die resultierende Ortsunschärfe etwa den halben Umfang erreicht habe

$$\Delta v_n T \sim U_n/2 \,.$$

(i) Leiten Sie aus diesen beiden Forderungen eine obere Grenze für das Produkt $\Delta x_n \Delta p_n$ ab.

(ii) Wie groß darf T_1 (d.h. T_n für die innerste Bahn $n = 1$) höchstens sein, damit diese Grenze mit der Heisenbergschen Unschärferelation kompatibel ist?

(iii) Welches ist die kleinste Bahnquantenzahl n, so dass $T_n = 1\,\mathrm{min}$? Welchen Radius besitzt die Bahn mit dieser Quantenzahl?

Hinw.: $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}\,,\ h \approx 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\,,\ m \approx 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\,,\ e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

2 **Heisenbergsche Unschärferelation** (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Heisenbergsche Unschärferelation für den Spezialfall hergeleitet, dass die Mittelwerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ zum betrachteten Zeitpunkt t für den betrachteten Zustand $\Psi(x,t)$ verschwinden. Verallgemeinern Sie diesen Beweis auf den Fall, dass diese Mittelwerte beliebig sein dürfen.

Tipp: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $\chi(x,t) = \Big((x - \langle x \rangle) + \lambda i(\hat{p} - \langle p \rangle)\Big)\Psi(x,t)$ und folgen Sie den Schritten aus dem Beweis in der Vorlesung/im Skript.

3 **Fourier-Transformation** (6 Punkte)

Ein Teilchen werde zur Zeit $t = 0$ durch die (Ortsraum-)Wellenfunktion

$$\Psi(x{,}0) = \sqrt{\frac{3\hbar^3}{\pi p_0^3}}\,\frac{1 - \cos(p_0 x/\hbar)}{x^2}$$

bzw. durch die Impulsraum-Wellenfunktion

$$\phi(p{,}0) = \sqrt{\frac{3}{2p_0^3}} \cdot \begin{cases} p_0 + p & -p_0 < p < 0 \\ p_0 - p & 0 < p < p_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben, wobei p_0 eine positive Konstante mit der Dimension eines Impulses ist.

Berechnen Sie die Unschärfen Δx und Δp und überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

Tipp: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos x)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\ .$$

Hinweis: Dass diese beiden Wellenfunktionen durch Fouier-Transformation ineinander übergehen, hatten Sie in Übungsaufgabe 3 von Blatt 4 gezeigt und soll jetzt als gegeben angenommen werden.