Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

Pk6 Quantenmechanik SS 2018

Übungsblatt 6, Abgabe am Do. 31.05.18 vor der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am Fr. 01.06.18.

Alle Aufgaben dieses Übungsblatts beziehen sich auf das folgende System:
Ein Teilchen der Masse m kann sich frei im Bereich $0 \leq x \leq L$ bewegen. Die normierten Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung lauten

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} & \text{für } x \in [0, L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

für $n = 1,2,3,\ldots$ mit den zugehörigen Energiewerten $E_n = E_1 n^2$, wobei $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.
Das Teilchen befände sich im Zustand mit der (normierten) Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \frac{i}{\sqrt{3}}\, \psi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \psi_2(x)\, e^{-4iE_1 t/\hbar}\,. \tag{2}$$

1 **Teilchen in einem Intervall — Energiemessung** $(1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen für ein Teilchen im Zustand (2).

a) Was sind die möglichen Messwerte, die man bei einer Energiemessung erhalten kann?

b) Wie groß sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

c) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle E \rangle$ für die Energie?

d) Können Sie einen Zustand für dieses System angeben, bei dem der Erwartungswert $\langle E \rangle$ zeitabhängig ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel. Falls nein, warum nicht?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 **Teilchen in einem Intervall — Ortsmessung** ($3+4+2=9$ Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich wieder auf den Zustand (2).

a) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$.

b) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle x\rangle(t)$ und bringen Sie ihn in die Form

$$\langle x\rangle(t) = \# + \#\sin(\# t)\ ,$$

wobei die Gatter für irgendwelche, zeitunabhängigen Größen stehen. Lesen Sie daraus ab,

(i) um welchen Mittelpunkt x_0,

(ii) mit welcher Amplitude A und

(iii) mit welcher Periodendauer T

der Erwartungswert schwingt.

c) Ein klassisches Teilchen würde in diesem System immer zwischen den Rändern des Intervalls hin- und herlaufen; dessen Bahnkurve wäre also ebenfalls periodisch. Welche Energie E_{kl} hätte ein klassisches Teilchen, dessen Bahnkurve dieselbe Periodendauer T besitzt? Vergleichen Sie diese Energie mit $\langle E\rangle$ aus Aufgabe 1c).

Es gilt

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\ , \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

sowie ($n, m = 1,2,3,\ldots$)

$$\int_0^L x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{L^2}{4}\ , \quad \int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{2nm\left((-1)^{n+m}-1\right)}{(n+m)^2(n-m)^2}\,\frac{L^2}{\pi^2}\ .$$

3 **Teilchen in einem Intervall — Impulsmessung** ($3+2+2=7$ Punkte)

a) Berechnen Sie die Impulsraumwellenfunktionen $\phi_n(p,t)$, die zu den Energieeigenfunktionen

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

gehören.

b) Berechnen Sie die zugehörigen Impulswahrscheinlichkeitsdichten

$$\rho_n(p,t) = |\phi_n(p,t)|^2\ .$$

c) Skizzieren Sie die Impulswahrscheinlichkeitsdichten für $n=1$, $n=2$ und $n=3$.

Es gilt ($n = 1,2,3,\ldots$)

$$\int_0^\pi \sin(nx)\,e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n^2-k^2}\left(1-(-1)^n e^{ik\pi}\right)\ .$$