Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2018

ÜBUNGSBLATT 9, Abgabe am Do. 21.06.18 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 22.06.18.

1 **Dirac-Formalismus** $(2+2+2+2+2+1 = 11$ Punkte)

Seien $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ und $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\chi|\chi\rangle$, $\langle\psi|\chi\rangle$, $\langle\chi|\psi\rangle$ und prüfen Sie, dass die beiden ersten reell sind und die beiden letzten zueinander komplex konjugiert.

b) Berechnen Sie die Dyaden $|\psi\rangle\langle\psi|$, $|\chi\rangle\langle\chi|$, $|\psi\rangle\langle\chi|$, $|\chi\rangle\langle\psi|$ und prüfen Sie, dass die beiden ersten hermitisch sind und die beiden letzten zueinander hermitisch konjugiert.

Seien $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ und $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Alle Einträge in den Kets und dem Operator seien Elemente aus $\mathbb{C}$.

c) Zeigen Sie, dass $(|\psi\rangle\langle\chi|)\,|\phi\rangle = |\psi\rangle\,(\langle\chi|\phi\rangle)$, wobei auf der linken Seite zuerst das dyadische Produkt und auf der rechten Seite zuerst das Skalarprodukt berechnet werden soll.

d) Berechnen Sie $\hat{A}\,|\chi\rangle$ und $\hat{A}^\dagger\,|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass die Skalarprodukte $\Big(|\psi\rangle\,, \hat{A}\,|\chi\rangle\Big)$ und $\Big(\hat{A}^\dagger\,|\psi\rangle\,, |\chi\rangle\Big)$ übereinstimmen.

e) Gegeben sei der Operator $\hat{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$. Suchen Sie nach zwei Kets $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$, so dass $\hat{B} = |\psi\rangle\langle\chi|$. Sind die beiden Kets eindeutig?

f) Der Operator $\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ sei hermitesch. Welche Einschränkungen ergeben sich für die komplexen Konstanten C_{nm} aufgrund der Hermitizität?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 **Eigenwert-Gleichung** $(2 + 4 + 1 + 1 + 1 = 9$ Punkte)

Gegeben sei der Operator $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte a_1 und a_2 des Operators.

b) Berechnen Sie die zugehörigen normierten Eigenkets $|\alpha_1\rangle$ und $|\alpha_2\rangle$.

c) Zeigen Sie, dass $\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = 0$.

d) Zeigen Sie, dass $|\alpha_1\rangle \langle\alpha_1| + |\alpha_2\rangle \langle\alpha_2| = \hat{\mathbb{1}}$.

e) Zeigen Sie, dass $a_1 |\alpha_1\rangle \langle\alpha_1| + a_2 |\alpha_2\rangle \langle\alpha_2| = \hat{A}$.