Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2018

ÜBUNGSBLATT 10, Abgabe am Do. 28.06.18 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 29.06.18.

1 Eine Observable (1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8 Punkte)

Gegeben ist ein System mit dreidimensionalem Zustandsraum $\mathcal{H}$. Eine Observable A sei durch die möglichen Messwerte

$$A_1 = 1 \;, \qquad A_2 = -1 \;, \qquad A_3 = 5$$

und die zugehörigen Eigenzustände

$$|\alpha_1\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;, \qquad |\alpha_2\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;, \qquad |\alpha_3\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert, wobei die Eigenzustände in irgendeiner gegebenen Orthonormalbasis geschrieben sind.

a) Prüfen Sie die Orthogonalität der Zustände $|\alpha_n\rangle$.

b) Normieren Sie diese Zustände.

c) Prüfen Sie die Vollständigkeit der normierten Zustände.

d) Das System befinde sich in dem Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \;.$$

Berechnen Sie die drei Wahrscheinlichkeiten ρ_n dafür, bei einer Messung von A die Werte A_n mit $n = 1,2,3$ zu erhalten. Prüfen Sie, dass $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$.

e) Konstruieren Sie den zugehörigen hermiteschen Operator $\hat{A}$ in der verwendeten Basis.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle A \rangle$ für den obigen Zustand $|\Psi\rangle$.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Energieerhaltung und Messprozess $(1+1+1+1=4$ Punkte)

Betrachten Sie die "Quantenmünze" aus der Vorlesung. Sie liege im Grundzustand, d.h. im Energieeigenzustand mit niedrigster Energie, auf dem Tisch.

a) Geben Sie diesen Zustand in der Wert-Basis $\{|K\rangle, |Z\rangle\}$ an.

b) Wie groß ist der Energieerwartungswert $\langle E\rangle$ in diesem Zustand?

Nun messen Sie den Münzwert. Unmittelbar danach ist der Zustand der Quantenmünze, je nach Ausgang der Messung, entweder $|K\rangle$ oder $|Z\rangle$.

c) Wie groß ist der Energieerwartungswert $\langle E\rangle$ nach der Messung?

d) Ist die Energie bei der Messung erhalten? Kommentieren Sie das Ergebnis.

3 Wert-Unschärfe der Quantenmünze $(2+2+2+2=8$ Punkte)

Die "Quantenmünze" ist ein System mit zweidimensionalem Zustandsraum $\mathcal{H}$. Der "Münzwert" W sei definiert über die Basiszustände

$$|K\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad |Z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und deren Werte $W_K = 1$ und $W_Z = -1$.

a) Argumentieren Sie, dass jeder normierte Zustand aus $\mathcal{H}$ geschrieben werden kann als

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \; e^{i\beta} \\ \sin\alpha \; e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

mit irgendwelchen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Wert-Unschärfe ΔW für den allgemeinen Zustand $|\Psi\rangle$.

c) Gegeben Sie einen Zustand $|\Psi_{\text{min}}\rangle$ an, für den die Unschärfe ΔW minimal ist. Wie ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $\rho_K : \rho_Z$ für diesen Zustand?

d) Gegeben Sie einen Zustand $|\Psi_{\text{max}}\rangle$ an, für den die Unschärfe ΔW maximal ist. Wie ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $\rho_K : \rho_Z$ für diesen Zustand?

Hinweis: Es gilt

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \; , \qquad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \; , \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \; .$$