Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
PD Dr. T. Klose, Dr. D. Müller

Pk6 Quantenmechanik SS 2018

Übungsblatt 11, Abgabe am Do. 05.07.18 vor der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen am Fr. 06.07.18.

1 **Zwei-Zustands-System** (5 Punkte)

Gegeben ist ein System mit zweidimensionalem Zustandsraum. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{U}$ zur Observablen U haben in einer Orthonormalbasis die Matrixdarstellungen

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 3 & -4i \\ 4i & -3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{U} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon > 0$ ist. Was sind die möglichen Messwerte für die Observable U und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten diese Werte zu messen, wenn sich das System im Grundzustand (d. h. im Energieeigenzustand mit der niedrigsten Energie) befindet?

2 **Eine Observable mit Entartung** ($2 + 3 + 1 + 3 + 2 = 11$ Punkte)

Eine Observable in einem System mit dreidimensionalem Zustandsraum $\mathcal{H}$ sei definiert durch den Operator

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die möglichen Messwerte.

   Tipp: Ein möglicher Messwert ist 3. Stichwort: Polynomdivision.

b) Bestimmen Sie orthonormale Eigenzustände zu diesem Operator.

c) Zeigen Sie die Vollständigkeit dieser Eigenzustände.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

d) Das System befinde sich im Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} .$$

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, die verschiedenen Messwerte zu messen? Wie groß sind der Erwartungswert $\langle A \rangle$ und die Unschärfe ΔA?

e) Welcher (normierte!) Ket beschreibt den Zustand, in den der obige Zustand $|\Psi\rangle$ kollabiert, falls der Messwert 3 gemessen wurde?

3 **Orts- und Impulsoperator** $(2 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

Der Zustand $|\psi\rangle$ sei alternativ durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben.

a) Durch welche Wellenfunktionen werden die Zustände

$$\hat{x}\,|\psi\rangle \;, \quad \hat{p}\,|\psi\rangle \;, \quad \hat{x}\hat{p}\,|\psi\rangle \;, \quad \hat{p}\hat{x}\,|\psi\rangle$$

beschrieben?

b) Sie werden festgestellt haben, dass $\hat{x}\hat{p}\,|\psi\rangle$ und $\hat{p}\hat{x}\,|\psi\rangle$ verschieden voneinander sind. Zeigen Sie, dass deren Differenz

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\,|\psi\rangle$$

durch die Wellenfunktion $i\hbar\psi(x)$ beschrieben wird.

c) Argumentieren Sie, wie man vom Ergebnis von Teilaufgabe b) zur Formel

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$$

gelangt.

Bem.: Die Begründer der Quantenmechanik sind auf anderem Wege zu dieser Formel gelangt als wir, und sie waren geschockt. Die Formel bedeutet, dass Ort und Impuls nicht die Rechenregeln der reellen Zahlen erfüllen, denn für $x, p \in \mathbb{R}$ gilt $xp - px = 0$. Man sieht außerdem, dass die Quantenmechanik schuld ist, denn für $\hbar \to 0$ ist wieder alles in Ordnung.