Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Präsenzübung 5 am 10.05.2019

1 Klassisches versus quantenmechanisches Zerfließen

Wie in der Vorlesung berechnet, wächst die Breite eines Gaußschen Wellenpakets für ein freies Teilchen der Masse m mit anfänglicher Unschärfe $\Delta x_{\mathrm{qm}} = \sigma_x$ gemäß

$$\Delta x_{\mathrm{qm}}(t) = \sqrt{(\Delta x_{\mathrm{qm}})^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2(\Delta x_{\mathrm{qm}})^2}}\ . \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie dieses Resultat mit einer klassischen Überlegung vergleichen. Nehmen wir an, wir haben zur Zeit $t = 0$ eine Vielzahl von Teilchen im Intervall $[x_{\mathrm{links}}, x_{\mathrm{rechts}}]$ der x-Achse mit zufällig verteilten Geschwindigkeiten im Bereich zwischen v_{min} und v_{max}. Wir bezeichnen mit

$$\Delta x_{\mathrm{kl}} = x_{\mathrm{rechts}} - x_{\mathrm{links}}$$

die anfängliche klassische "Ortsunschärfe" und mit $\Delta v_{\mathrm{kl}} = v_{\mathrm{max}} - v_{\mathrm{min}}$ die klassische "Geschwindigkeitsunschärfe".

(a) Wie groß ist der Abstand $\Delta x_{\mathrm{kl}}(t)$ der am weitesten voneinander entfernten Teilchen nach der Zeit t höchstens?

(b) Um das klassische Resultat aus (a) mit dem quantenmechanischen Resultat in (1) vergleichen zu können, schreiben Sie den zweiten Term unter der Wurzel in letzterem wie folgt um. Benutzen Sie die Unschärferelation für Gaußpakete ($\Delta k\, \Delta x = \sigma_k \sigma_x = \frac{1}{2}$), um von der Ortsunschärfe zur Wellenzahlunschärfe zu wechseln, und dann die de Broglie-Beziehung, um von der Wellenzahlunschärfe zur Geschwindigkeitsunschärfe zu wechseln. Die beiden Resultate sollten nun sehr ähnlich aussehen.

(c) Wächst die Breite klassisch oder quantenmechanisch schneller oder wachsen beide gleich schnell?

Tipp: Pythagoras

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Impulsmessung

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einem gegebenen Potential sei zur Zeit t_0

$$\Psi(x, t_0) = A_0 \cdot \begin{cases} 1 & x_1 < x < x_2 \ , \\ 0 & \text{sonst} \ , \end{cases}$$

wobei A_0, x_1 und x_2 reell sind, sowie $A_0 > 0$ und $x_1 < x_2$.

(a) Skizzieren Sie $\Psi(x, t_0)$.

(b) Bestimmen Sie die Konstante A_0 aus der Normierungsbedingung in Abhängigkeit von x_1 und x_2.

(c) Berechnen Sie die Impulsraum-Wellenfunktion $\phi(p, t_0)$ zur Zeit t_0.

(d) Berechnen und skizzieren Sie die Impulswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(p, t_0)$.

(e) Überprüfen Sie, dass die Impulswahrscheinlichkeitsdichte automatisch korrekt normiert ist.

Tipp: Es gilt $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ und je nach Rechenweg könnte Folgendes hilfreich sein

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} \, \mathrm{d}\alpha = \pi \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \, \mathrm{d}\alpha = \pi \ .$$

Bonusaufgabe

3 Abschätzung

Die Heisenbergsche Unschärfe-Relation wird häufig für Abschätzungen verwendet. Dazu setzt man für Δx und Δp typische Größen des betrachteten physikalischen Systems ein, ohne die exakten Standardabweichungen zu berechnen.

Schätzen Sie die Größenordnung des Betrags der Geschwindigkeit und der Energie ab, die ein Elektron der Masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$ mindestens hat, wenn es auf den Bereich $|x| \leq 1\,\text{Å}$ der x-Achse eingesperrt wird, aber sich in diesem Bereich kräftefrei bewegen kann.

Bem.: $1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ ist eine typische atomare Längenskala.