Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Präsenzübung 6 am 17.05.2019

1 Summe faktorisierter Lösungen

Sie erkennen die Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega(k_n)t)}$$

mit $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ als eine Lösung der (zeitabhängigen) Schrödingergleichung für das freie Teilchen.

a) Überzeugen Sie sich, dass dies eine Summe von faktorierten Ausdrücken der Form $\psi(x)f(t)$ ist.

b) Identifizieren Sie für einen Summanden die Funktionen $\psi_n(x)$ und $f_n(t)$, und lesen Sie daraus die Energie E_n ab. Zeigen Sie, dass der Faktor $\psi_n(x)$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung für diese Energie erfüllt.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Teilchen in einem Intervall — klassisch versus quantenmechanisch

Gegeben ist ein punktförmiges Teilchen der Masse m, dass sich frei im Intervall $[0, L]$ bewegen, aber dieses Intervall nicht verlassen kann.

In der *klassischen Beschreibung* dieses System läuft das Teilchen mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag zwischen den Intervallgrenzen hin und her. Wir nehmen an, die Reflexion an den Intervallgrenzen sei elastisch und ohne Zeitverlust.

Die *quantenmechanische Beschreibung* dieses Systems erfolgt über die (normierten) Energieeigenfunktionen

$$\Psi_n(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{L}}\, \sin \dfrac{n\pi x}{L}\, e^{-iE_n t/\hbar} & \text{für } x \in [0, L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$ und $n = 1,2,3,\ldots$.

(a) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{\text{kl}}(x)$ für die klassische Bewegung. Überzeugen Sie sich, dass diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit unabhängig von der Energie bzw. der Geschwindigkeit des Teilchens ist.

(b) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten $\rho_n(x)$ für die quantenmechanischen Energieeigenfunktionen $\Psi_n(x,t)$.

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle_{\text{kl}}$ und $\langle x \rangle_n$ für die klassische bzw. die quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten aus (a) und (b).

(d) Berechnen Sie die Ortsunschärfen Δx_{kl} und Δx_n. Betrachten Sie den Grenzwert $n \to \infty$ und vergleichen Sie.

Hinweis: Es gilt (für $n = 1,2,3,\ldots$)

$$\int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L^2}{4}\,, \qquad \int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L^3}{12}\left(2 - \frac{3}{\pi^2 n^2}\right)\,.$$