



PRÄSENZAUFGABEN 10 am 14.06.2019

1 Spin-Messung

- a) Die Zustände $|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle, |\otimes\rangle, |\odot\rangle, |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ sind die Spin-Eigenzustände mit den Spinwerten $S_x = \frac{\hbar}{2}, S_x = -\frac{\hbar}{2}, S_y = \frac{\hbar}{2}, S_y = -\frac{\hbar}{2}, S_z = \frac{\hbar}{2}$ bzw. $S_z = -\frac{\hbar}{2}$, und es gilt

$$\begin{aligned} |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, & |\otimes\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, \\ |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, & |\odot\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Schreiben Sie

- (i) die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ als Superposition der Zustände $|\rightarrow\rangle$ und $|\leftarrow\rangle$,
 - (ii) die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ als Superposition der Zustände $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$,
 - (iii) die Zustände $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$ als Superposition der Zustände $|\rightarrow\rangle$ und $|\leftarrow\rangle$,
 - (iv) die Zustände $|\rightarrow\rangle$ und $|\leftarrow\rangle$ als Superposition der Zustände $|\otimes\rangle$ und $|\odot\rangle$.
- b) Ein Silberatom befindet sich im Spin-Zustand

$$|\psi\rangle = |\rightarrow\rangle + 2i |\leftarrow\rangle.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\rho_{\rightarrow}, \rho_{\leftarrow}, \rho_{\otimes}, \rho_{\odot}, \rho_{\uparrow}$ und ρ_{\downarrow} für die verschiedenen Ausgänge bei einer Messungen von der Spinkomponenten S_x, S_y und S_z des Silberatoms in diesem Zustand.

- c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Messausgänge für die Zustände $|\psi\rangle$ und $\lambda |\psi\rangle$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ identisch sind.

Bem.: Diese Aussage gilt für alle Systeme und alle Messungen, doch zeigen Sie sie gerne nur für Spinmessungen an einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.

- d) Schreiben Sie den allgemeinsten Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ auf, für den $\rho_{\uparrow} = \frac{1}{3}$ und $\rho_{\downarrow} = \frac{2}{3}$ die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge einer S_z -Spinmessung sind. Bestimmen Sie nun einen speziellen Zustand, für den zusätzlich $\rho_{\rightarrow} = \frac{5}{6}$ und $\rho_{\leftarrow} = \frac{1}{6}$ die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge einer S_x -Spinmessung sind.

Hinweis: Es gilt $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $e^{\pm i\pi/4} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$.