Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Präsenzaufgaben 12 am 28.06.2019

1 Eigenwertgleichung

Gegeben sind die Eigenzustände

$$|\alpha_1\rangle \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\alpha_2\rangle \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu den beiden Messwerten $A_1 = -1$ bzw. $A_2 = 4$ einer Observablen A.

a) Zeigen Sie dass, die Zustände $|\alpha_1\rangle$ und $|\alpha_2\rangle$ orthogonal sind und normieren Sie sie.

b) Berechnen Sie den zugehörigen Operator

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{2} A_i \hat{P}_i \ ,$$

wobei $\hat{P}_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ die Projektoren auf die Eigenzustände sind.

c) Lösen Sie für diesen Operator die Eigenwert-Gleichung

$$\hat{A}\,|\alpha\rangle = A\,|\alpha\rangle \ .$$

und vergleich Sie, ob Sie die ursprünglichen Messwerte und Eigenzustände erhalten oder nicht.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Zeitentwicklung und Messung

Gegeben ist ein Quantensystem mit zweidimensionalem Zustandsraum. Die Observable A ist definiert durch die Messwerte A_1 und A_2 (mit $A_1 \neq A_2$) und den zugehörigen Eigenzuständen

$$|\alpha_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |\alpha_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Energieeigenzustände in dieser Basis seien gegeben durch

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

mit den Energien $E_1 = 0$ und $E_2 = \varepsilon$.

a) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ für dieses System. Wie lautet er für $t = \frac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$?

b) Wir starten mit dem System im Zustand $|\alpha_1\rangle$, warten die Zeit $\Delta t = \frac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$ und führen dann eine A-Messung durch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten[1] ρ_{11} und ρ_{21} dafür, bei dieser Messung den Wert A_1 bzw. A_2 zu erhalten. In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach dieser Messung?

c) Beantworten Sie dieselbe Frage wie oben für den Anfangszustand $|\alpha_2\rangle$ — nennen Sie die Wahrscheinlichkeiten nun ρ_{12} und ρ_{22}.

d) Nun starten wir mit dem Zustand $|\alpha_1\rangle$, warten $\Delta t = \frac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$, messen A, warten wieder $\Delta t = \frac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$ und messen abermals A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten A-Messung A_1 zu erhalten?

e) Wir starten wieder mit dem Zustand $|\alpha_1\rangle$, aber warten und messen nun dreimal in Folge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei der letzten A-Messung A_1 zu erhalten?

f) **“Sternchenaufgabe”** Schließlich starten wir nochmal mit dem Zustand $|\alpha_1\rangle$ und wiederholen obigen Prozess ($\Delta t = \frac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$ warten und A messen) seeehr häufig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach sehr langer Zeit im Zustand $|\alpha_1\rangle$ befindet?

[1] Die Notation ρ_{ij} bedeutet $\rho_{\text{Messwert},\text{Anfangszustand}}$