Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 4, Abgabe: Do. 09.05.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 10.05.19.

1 **Komplexe Zahlen** ($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen z, das komplex Konjugierte z^*, das Inverse $\frac{1}{z}$, das Quadrat z^2 und das Betragsquadrat $|z|^2$ jeweils in kartesischer Darstellung (d.h. als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$). Schreiben Sie die Zahlen z außerdem in Polardarstellung $re^{i\varphi}$ mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$.

a) $z = (1 + i)^2$ b) $z = \dfrac{1 - i}{2 + i}$ c) $z = \sqrt{1 + i}$

Tipp: In Aufgabe c) bietet es sich an, $1 + i$ zunächst in Polarform zu schreiben und dann die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten. Betrachten Sie nur den Hauptwert der Wurzel, d.h. z.B. $\sqrt{4} = +2$, nicht $\sqrt{4} = \pm 2$.

2 **Freies Teilchen** ($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Hinweis: Rechnen Sie in dieser Aufgabe näherungsweise mit $\hbar = 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$.

Ein freies, nicht-relativistisches Teilchen sei in dem Zustand, der durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x, t) = e^{-8\,\mathrm{kHz}\cdot it} \sin\left(\tfrac{4\,x}{\mathrm{mm}}\right)$$

beschrieben wird.

a) Formen Sie die Wellenfunktion in eine Summe von Partialwellen um. Aus wie vielen Partialwellen besteht der Zustand? Lesen Sie die Amplituden A_i und die Wellenzahlen k_i ab.

Tipp: Es gilt $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.

b) Welche Masse besitzt das Teilchen?

c) Welche Werte können sich bei einer Geschwindigkeitsmessung ergeben und mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden sie gemessen?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 **Folge von Partialwellen** ($3 + 5 = 8$ Punkte)

Ein freies Teilchen sei in einem Superpositionszustand aus unendlich vielen Partialwellen mit den Wellenzahlen

$$k_1\,, \quad k_2 = 2k_1\,, \quad k_3 = 3k_1\,, \quad k_4 = 4k_1\,, \quad k_5 = 5k_1\,, \quad \ldots\,,$$

d.h. die Vielfachen von k_1 sind mögliche Messwerte für die Wellenzahl. Die Wahrscheinlichkeit k_1 zu messen sei ρ_1. Die Wahrscheinlichkeit für die Vielfachen nimmt jeweils um den Faktor $\frac{1}{2}$ ab, also

$$\rho_1\,, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1\,, \quad \rho_3 = \frac{1}{2^2}\rho_1\,, \quad \rho_4 = \frac{1}{2^3}\rho_1\,, \quad \rho_5 = \frac{1}{2^4}\rho_1\,, \quad \ldots\,.$$

a) Nehmen Sie an, dass die Amplituden aller Partialwellen reell und positiv sind. Bezeichnen Sie die Amplitude der ersten Partialwelle mit A_1. Geben Sie die Amplituden der anderen Partialwellen als Vielfache von A_1 an.

b) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x{,}0)$ für die Zeit $t = 0$ und zeigen Sie, dass die daraus resultierende Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\rho(x{,}0) = \frac{2A_1^2}{3 - 2\sqrt{2}\cos k_1 x}$$

gegeben ist.

Tipp: Der Wert der geometrischen Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Bem.: Die Wellenfunktion ist nicht normierbar, ähnlich einer einzelnen Partialwelle.

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann mit komplexen Zahlen (fehlerfrei! :-) rechnen; dazu gehören die Grundrechenarten, Potenzieren und Wurzelziehen, Betrag ausrechnen und zwischen kartesischer Form und Polarform umrechnen.
- Ich kenne die Form einer Partialwelle für das freie, nicht-relativistische Teilchen mit gegebener Masse in einer Dimension und weiß wie Impuls, Wellenzahl, (de Broglie-)Wellenlänge, Energie und Kreisfrequenz in Beziehung stehen. Ich kenne die Dispersionsrelation und kann damit Berechnungen durchführen.
- Ich weiß, wie sich die allgemeinste Form der Wellenfunktion eines freien Teilchens aus Partialwellen aufbaut und kann aus den Amplituden der Partialwellen die Wahrscheinlichkeiten für die Messung von Wellenzahl, Wellenlänge, Geschwindigkeit und Energie berechnen.