Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 5, Abgabe: Do. 16.05.19 vor der Vorlesung, Besprechung: in den Übungen am Fr. 17.05.19.

1 **Zerfließen** ($2 + 3 = 5$ Punkte)

Gegeben sei ein freies Teilchen ohne mittleren Impuls, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ durch eine Gaußfunktion beschrieben ist. Die Ortsunschärfe sei zum Zeitpunkt $t = 0$ minimal und gegeben durch die Standardabweichung

$$\sigma_x = 1\,\mu\mathrm{m} = 10^{-6}\,\mathrm{m}\ .$$

a) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Ortsunschärfe auf das Doppelte angewachsen ist

   (i) für ein Elektron, dessen Masse ungefähr $m_e \approx 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ beträgt,

   (ii) für ein Staubkorn der Masse $m_s \approx 1\,\mathrm{mg}$.

b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Zeit Δt_n an, die es dauert, bis die Unschärfe auf das n-fache des ursprünglichen Wertes σ_x angewachsen ist. Schreiben Sie die Formel für allgemeines σ_x und allgemeine Masse m auf.

Hinweis: Sie dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung zitieren, ohne sie erneut herzuleiten.

2 **Impulsmessung** ($1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 9$ Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einem gegebenen Potential sei zur Zeit t_0

$$\Psi(x,t_0) = A_0 \cdot \begin{cases} x_0 + x & -x_0 < x < 0\ , \\ x_0 - x & 0 \leq x < x_0\ , \\ 0 & \text{sonst}\ , \end{cases}$$

wobei A_0 und x_0 reell und positiv sind.

(a) Skizzieren Sie $\Psi(x,t_0)$.

(b) Bestimmen Sie die Konstante A_0 aus der Normierungsbedingung in Abhängigkeit von x_0.

(c) Berechnen Sie die Impulsraum-Wellenfunktion $\phi(p, t_0)$ zur Zeit t_0.

(d) Berechnen und skizzieren Sie die Impulswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(p, t_0)$.

(e) Überprüfen Sie, dass die Impulswahrscheinlichkeitsdichte automatisch korrekt normiert ist.

Tipp: Partielle Integration. Und je nach Rechenweg könnte Folgendes hilfreich sein

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha^4}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{3}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4\alpha}{\alpha^4}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

und wie immer gilt $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.

3 **Bohrsches Atommodell** ($3 + 1 + 1 + 1 = 6$ Punkte)

Nach dem Bohrschen Atommodell umkreisen die Elektronen den Atomkern wie Planeten die Sonne. In dieser Aufgabe sollen Sie abschätzen, ob die Heisenbergsche Unschärferelation mit dieser Vorstellung einverstanden ist.

a) Die möglichen Bahnradien r_n und die dazugehörigen Geschwindigkeiten v_n mit $n = 1{,}2{,}3, \ldots$ berechnen sich nach Bohr wie folgt: zum einen setzt man die Coulomb-Kraft $F_\mathrm{C} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r_n^2}$ gleich der Zentipetalkraft $F_\mathrm{Z} = m\dfrac{v_n^2}{r_n}$. Zum anderen fordert man, dass die de Broglie Wellenlänge $\lambda_n = \dfrac{h}{mv_n}$ des Elektrons genau n-Mal in den Umfang $U_n = 2\pi r_n$ seiner Umlaufbahn passt. Stellen Sie diese beiden Gleichungen auf und leiten Sie daraus eine Formel für die Bohrradien r_n ab.

b) Damit man von "umkreisen [...] wie Planeten" sprechen kann, sollte die Ortsunschärfe Δx_n entlang der Bahn vielleicht nicht mehr als den halben Umfang betragen

$$\Delta x_n \lesssim U_n/2\,.$$

Die Geschwindigkeitsunschärfe Δv_n führt mit der Zeit ebenfalls zu einer Ortsunschärfe. Sagen wir T_n sei die Zeit, nach der die resultierende Ortsunschärfe etwa den halben Umfang erreicht habe

$$\Delta v_n T_n \sim U_n/2\,.$$

(i) Leiten Sie aus diesen beiden Forderungen eine obere Grenze für das Produkt $\Delta x_n \Delta p_n$ ab.

(ii) Wie groß darf T_1 (d.h. T_n für die innerste Bahn $n = 1$) höchstens sein, damit diese Grenze mit der Heisenbergschen Unschärferelation kompatibel ist?

(iii) Welches ist die kleinste Bahnquantenzahl n, so dass $T_n = 1\,\mathrm{min}$? Welchen Radius besitzt die Bahn mit dieser Quantenzahl?

Hinw.: $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}$, $h \approx 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, $m \approx 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann die Zeitentwicklung der Wellenfunktion eines freien Teilchens berechnen, d.h. ich kann aus der Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ die Amplitudenfunktion mittels Fouriertransformation berechnen und anschließend die Wellenfunktion zu einer beliebigen Zeit mittels einer weiteren Fouriertransformation.
- Ich weiß, dass eine normierbare Wellenfunktion für ein freies Teilchen notwendigerweise aus einem Kontinuum an Partialwellen besteht. Folglich nimmt die Ortsunschärfe mit der Zeit im Allgemeinen zu, da die Partialwellen auseinanderlaufen. Für eine Gaußsche Wellenfunktion kann ich für ein Teilchen ohne mittleren Impuls die Vergrößerung der Ortsunschärfe mit der Zeit quantitativ angeben.
- Ich kann für ein Teilchen in einem beliebigen Potential zwischen der Ortsraum-Wellenfunktion $\psi(x,t)$ und der Impulsraum-Wellenfunktion $\phi(p,t)$ umrechnen. Ich kann Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Impuls direkt aus der Impulsraum-Wellenfunktion oder indirekt aus der Ortsraum-Wellenfunktion mit Hilfe des Impulsoperators berechnen.
- Ich kenne die Aussage der Heisenbergsche Unschärferelation und weiß, welche prinzipiellen Schritte es verlangt, sie experimentellen zu testen.