Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 6, Abgabe: Do. 23.05.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 24.05.19.

Alle Aufgaben dieses Übungsblatts beziehen sich auf das folgende System:
Ein Teilchen der Masse m kann sich frei im Bereich $0 \leq x \leq L$ bewegen. Die normierten Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung lauten

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} & \text{für } x \in [0, L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

für $n = 1{,}2{,}3, \ldots$ mit den zugehörigen Energiewerten $E_n = E_1 n^2$, wobei $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.
Das Teilchen befindet sich im Zustand mit der (normierten) Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \frac{i}{2}\, \psi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \psi_2(x)\, e^{-4iE_1 t/\hbar}\,. \tag{2}$$

1 **Teilchen in einem Intervall — Energiemessung** $(1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen für ein Teilchen im Zustand (2).

a) Was sind die möglichen Messwerte, die man bei einer Energiemessung erhalten kann?

b) Wie groß sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

c) Wie groß ist der Erwartungswert $\langle E \rangle$ für die Energie?

d) Können Sie einen Zustand für dieses System angeben, bei dem der Erwartungswert $\langle E \rangle$ zeitabhängig ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel. Falls nein, warum nicht?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 **Teilchen in einem Intervall — Ortsmessung** ($4 + 4 = 8$ Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich wieder auf den Zustand (2).

a) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$.

b) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle x\rangle(t)$ und bringen Sie ihn in die Form

$$\langle x\rangle(t) = \# + \# \sin(\# t) \ ,$$

wobei die Gatter für irgendwelche, zeitunabhängigen Größen stehen. Lesen Sie daraus ab,

(i) um welchen Mittelpunkt x_0,

(ii) mit welcher Amplitude A und

(iii) mit welcher Periodendauer T

der Erwartungswert schwingt.

Hinweis: Es gilt

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \ , \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

sowie (für $n, m = 1{,}2{,}3, \ldots$)

$$\int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L^2}{4} \ , \quad \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{2nm\big((-1)^{n+m} - 1\big)}{(n+m)^2(n-m)^2} \, \frac{L^2}{\pi^2} \ .$$

3 **Teilchen in einem Intervall — Impulsmessung** ($4 + 2 + 2 = 8$ Punkte)

a) Berechnen Sie die Impulsraumwellenfunktionen $\phi_n(p,t)$, die zu den aus (1) gebildeten Energieeigenfunktionen

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

gehören.

b) Berechnen Sie die zugehörigen Impulswahrscheinlichkeitsdichten

$$\rho_n(p,t) = |\phi_n(p,t)|^2 \ .$$

c) Skizzieren Sie (gerne mit `www.wolframalpha.com` o.ä.) die Impulswahrscheinlichkeitsdichten für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$.

Hinweis: Es gilt ($n = 1{,}2{,}3, \ldots$)

$$\int_0^\pi \sin(nx)\, e^{ikx} \, \mathrm{d}x = \frac{n}{n^2 - k^2}\left(1 - (-1)^n e^{ik\pi}\right) \ .$$

Neue Lernziele erreicht?

- Ich weiß, wie die Lösungen der zeitabhängigen und der zeitunabhängigen Schrödingergleichung miteinander zusammenhängen. Insbesondere kann ich die Energieeigenfunktionen sowie die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung angeben, wenn die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit den zugehörigen Energien bekannt sind.
- Ich weiß, wie sich die physikalisch akzeptablen Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für gegebenes Potential grundsätzlich berechnen lässen und wie es zur Energiequantisierung kommt.
- Für eine beliebige Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung kann ich die Wahrscheinlichkeiten ablesen, einen gewissen Energiewert zu messen, und daraus Energieerwartungswerte (wie Mittelwert und Unschärfe) berechnen. Ich kann die nach einer Energiemessung mit bekanntem Ausgang kollabierte Wellenfunktion angeben.
- Ich kenne qualitativ die Energieeigenfunktionen und das Energiespektrum für ein Teilchen in einem Intervall (auch "Teilchen im unendlichen Potentialtopf" genannt).