Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2019

ÜBUNGSBLATT 8, Abgabe: Do. 06.06.19 vor der Vorlesung, Besprechung: in den Übungen am Fr. 07.06.19.

1 Zweidimensionaler Potentialtopf ($3 + 2 + 4 + 3 + 5 + 3 = 20$ Punkte)

Ein Teilchen der Masse μ ist durch das Potential

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq L \text{ und } 0 \leq y \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

in seiner Bewegung auf ein Quadrat der Größe $L \times L$ in der x-y-Ebene eingeschränkt. Dies bedeutet, dass die Wellenfunktion $\psi(x,y)$ innerhalb des Quadrats die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = E\psi(x,y) \tag{2}$$

erfüllen und am Rand des Quadrats den Wert Null annehmen muss.

a) Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass $X(x)$ und $Y(y)$ die Gleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} = E_x X(x) \ , \qquad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} = E_y Y(y) \tag{3}$$

erfüllen, die Funktion $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$ die Gleichung (2) mit $E = E_x + E_y$ löst.

b) Welche Randbedingungen müssen $X(x)$ und $Y(y)$ erfüllen, so dass die Funktion $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$ die geforderte Randbedingung erfüllt?

c) Geben Sie die normierten Lösungen der Gleichungen (3) und der gefundenen Randbedingungen an. (Wenn Sie die Gleichungen korrekt identifizieren, können Sie die Lösungen direkt aus einer alten Vorlesung abschreiben.)

d) Bauen Sie aus diesen Lösungen, die allgemeine Lösung $\Psi(x,y,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung für das Potential (1) zusammen.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

e) Geben Sie die vier niedrigsten Energien des Spektrums als Vielfaches von $\varepsilon = \frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu L^2}$ und deren Entartungen an. Welches in die kleinste dreifach entartete Energie?

f) Stellen Sie die drei Zustände zu der kleinsten dreifach entarteten Energie graphisch als "Elektronenwolken" dar, d.h. als Punktesammlung, die dort dichter ist wo die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte größer ist.

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann Potentiale erkennen, für die es mittels Separationsansatz möglich ist, die Schrödingergleichung eines mehrdimensionalen Systems in mehrere eindimensionale Schrödingergleichungen zu zerlegen. Ferner weiß ich, wie sich die Wellenfunktionen und das Energiespektrum des mehrdimensionalen Systems aus den Wellenfunktionen und den Energiespektren der eindimensionalen Systeme kombinieren lassen.
- Ich weiß, was Quantenzahlen sind.
- Ich kenne die Quantenzahlen und die Energiespektren für das zwei- sowie das dreidimensionale Coulombpotential.
- Ich bin mit der Darstellungsweise einer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte durch eine "Elektronenwolke".vertraut.