Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

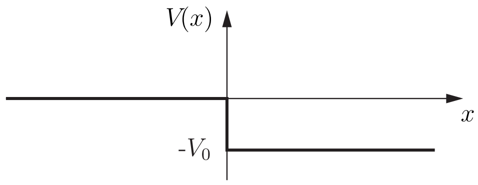
Pk6 Quantenmechanik SS 2019

**Übungsblatt 9, Abgabe: Do. 13.06.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 14.06.19.**

1 **Potentialabhang** (7 Punkte)

Gegeben ist die (negative) Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



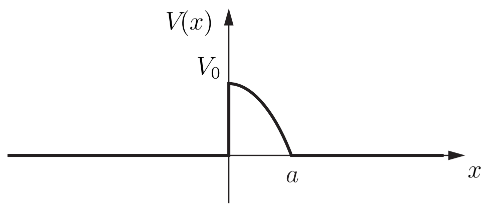
mit $V_0 > 0$. Berechnen Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten für einen von links mit der Energie $E > 0$ einlaufenden Teilchenstrom als Funktion von E.

Tipp: Gehen Sie analog zur Rechnung für die positive Potentialstufe aus der VL vor.

2 **Tunneleffekt** (6 Punkte)

Ein konstanter Strom j_{ein} aus Teilchen der Energie E mit $0 < E < V_0$ laufe von links auf ein breites Potential der folgenden Form zu:

$$V(x) = \begin{cases} (1 - x^2/a^2)V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Berechnen Sie näherungsweise (d.h. verwenden Sie die Gamow-Formel) den durch die Potentialbarriere tunnelnden Strom j_{trans}.

Hinweis: Es gilt

$$\int\limits_{x=0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ .$$

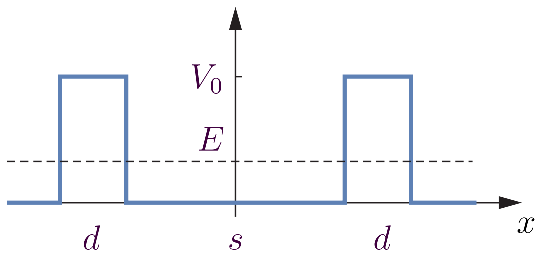
3 **Radioaktiver Zerfall** $(1 + 2 + 4 = 7$ Punkte)

Die Halbwertzeiten τ von sehr ähnlichen Atomkernen können extrem unterschiedlich ausfallen, wie die Werte für zwei Isotope des Poloniums zeigen:

$$
\begin{array}{llll}
{}^{212}\mathrm{Po} \;\to\; {}^{208}\mathrm{Pb} + \alpha & \qquad E = 1{,}40 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,, & \qquad \tau = 3{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}\,, \\
{}^{210}\mathrm{Po} \;\to\; {}^{206}\mathrm{Pb} + \alpha & \qquad E = 0{,}86 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,, & \qquad \tau = 1{,}2 \cdot 10^{+7}\,\mathrm{s}\,.
\end{array}
$$

In dieser Aufgabe werden Sie zeigen, dass ein sehr einfaches Modell diese Zahlen auf natürliche Weise reproduzieren kann.

Wir modellieren den Atomkern als ein eindimensionales System mit zwei Potentialbarrieren, zwischen denen ein α-Teilchen eingeschlossen ist und sich hin und her bewegt.



Bei jedem Auftreffen auf eine der Potentialbarrieren gibt es eine gewissen Wahrscheinlichkeit dafür, dass das α-Teilchen durch die Barriere tunnelt und damit der Kern als zerfallen gilt.

a) Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Zahl der Teilchen $N(t)$ gemäß der Formel

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \tag{1}$$

exponentiell ab, wobei N_0 die Zahl der Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ und λ die für den Stoff charakteristische Zerfallskonstante ist. Die Halbwertszeit τ ist definiert als die Zeit, nach der sich die Teilchenzahl halbiert hat, also $N(\tau) = \frac{1}{2}N_0$. Benutzen Sie diese Definition, um τ als Funktion der Zerfallskonstanten λ zu schreiben.

b) Bei jedem Auftreffen auf eine Barriere ist die Wahrscheinlichkeit, dass das α-Teilchen dem Kern entkommt, gleich dem (energieabhängigen) Transmissionskoeffizienten

$$T = \exp\left[-\frac{2d}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right]\,,$$

wobei m die Masse und E die Energie des α-Teilchens ist. Bei insgesamt $N(t)$ Teilchen sind das im Mittel $\Delta N = T \cdot N(t)$ Zerfälle in der Zeit Δt, die das α-Teilchen für die Bewegung von einer zur anderen Barriere benötigt. Diese Zerfallsrate setzen wir gleich der Zerfallsrate, die aus (1) folgt:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \stackrel{!}{=} \left|\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}\right|\,.$$

Folgern Sie aus dieser Gleichung und den vorangegangenen Teilresultaten die Beziehung

$$\frac{\tau}{\Delta t\,\ln 2} = \exp\left[\frac{2d}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right]\,.$$

c) Finden Sie Werte für d und V_0, mit denen die Halbwertszeiten der beiden Polonium-Isotope für die angegebenen Energien korrekt vorhergesagt werden. Verwenden Sie $m \approx 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $\Delta t \approx 10^{-21}\,\mathrm{s}$ und $\hbar \approx 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$.

Tipp: Falls Sie nicht sofort Zahlen einsetzen, führen Sie Abkürzungen ein, wie z.B. $L_i = \left(\ln \frac{\tau_i}{\Delta t \ln 2}\right)^2$, wobei $i \in \{1{,}2\}$ die Isotope nummeriert.

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein abschnittsweise konstantes Potential lösen. Insbesondere kann ich mit Hilfe der Anschlussbedingungen die Integrationskonstanten für die verschiedenen Abschnitte in Beziehung setzen.
- Ich weiß, wie man aus einer Partialwelle den Teilchenstrom abliest und wie sich daraus der Transmissions- und der Reflektionskoeffizient ergibt. Ferner kann ich für ein gegebenes (Stufen-)Potential, die qualitative Abhängigkeit des Transmissions- und Reflektionskoeffizient von der Energie vorhersagen.
- Ich kann die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Teilchen mit bekannter Energie durch ein beliebiges Potential in der Gamow-Näherung berechnen.