Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 10, Abgabe: Do. 20.06.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 21.06.19.

Hinweis: Für dieses Übungsblatt benötigen Sie

$$|\rightarrow\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle \qquad |\otimes\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle$$

$$|\leftarrow\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle \qquad |\odot\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle$$

und als ob Sie's noch nicht wüssten, sei gesagt, dass

$$\cos x = \frac{1}{2}\big(e^{ix} + e^{-ix}\big)\ , \quad \sin x = \frac{1}{2i}\big(e^{ix} - e^{-ix}\big)\ .$$

1 **Spin-Messung** (3 + 2 = 5 Punkte)

a) Ein Silberatom befindet sich im Spin-Zustand

$$|\psi\rangle = 4\,|\otimes\rangle + 3i\,|\odot\rangle\ .$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ausgänge bei der Messungen von S_x, S_y und S_z für diesem Zustand.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle S_x\rangle$ und $\langle S_z\rangle$ sowie die Unschärfen ΔS_x und ΔS_z für den Zustand $|\rightarrow\rangle$.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 **Wahrscheinlichkeiten für Spin-Komponenten** ($1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 9$ Punkte)

Sei $\rho_\uparrow$ eine vorgegebenen Zahl im Intervall [0,1].

a) Schreiben Sie die Menge aller Zustände $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ auf, für die die Wahrscheinlichkeit für den Ausgang $+\frac{\hbar}{2}$ einer S_z-Spinmessung gleich $\rho_\uparrow$ ist.

b) In welchem Intervall liegen für die Zustände aus a) die Wahrscheinlichkeiten $\rho_\rightarrow$ bei einer S_x-Spinmessung, den Ausgang $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten?

c) Ist es möglich einen Zustand $|\psi\rangle$ zu konstruieren, für den $\rho_\uparrow = 90\%$ und $\rho_\rightarrow = 90\%$ beträgt?

d) Skizzieren Sie in einem $\rho_\uparrow$-$\rho_\rightarrow$-Diagramm den Bereich für den Zustände existieren.

e) Berechnen Sie für die Zustände in a) auch die Wahrscheinlichkeiten $\rho_\otimes$ und zeigen Sie, dass

$$\left(\rho_\uparrow - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\rho_\rightarrow - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\rho_\otimes - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

gilt. Interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch in einem $\rho_\uparrow$-$\rho_\rightarrow$-$\rho_\otimes$-Diagramm.

3 **Spin-Präzession** ($2 + 1 + 3 = 6$ Punkte)

Ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, das in z-Richtung zeigt. Die Energie des Zustands $|\uparrow\rangle$ sei $E_\uparrow = -\hbar\omega$ und die Energie des Zustands $|\downarrow\rangle$ sei $E_\downarrow = \hbar\omega$, wobei ω eine positive Konstante ist. Die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustands kann man somit schreiben als

$$|\Psi(t)\rangle = Ae^{i\omega t}\,|\uparrow\rangle + Be^{-i\omega t}\,|\downarrow\rangle$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$.

a) Finden Sie Konstanten A und B, so dass $|\Psi(0)\rangle = |\rightarrow\rangle$.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $\rho_\uparrow$ für alle Zeiten 50% beträgt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\rho_\rightarrow(t)$ als Funktion der Zeit.

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann den Ausgang eines Stern-Gerlach-Experiments mit einer beliebigen Anordnung von Stern-Gerlach-Elementen vorhersagen.
- Ich kenne die möglichen Ausgänge für die Messung der Spinkomponente eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen entlang einer beliebigen Achse.
- Ich kann zwischen den drei Basen aus Spin-Eigenzuständen für die kartesischen Richtungen (x, y und z) umrechnen. Damit kann ich die Wahrscheinlichkeiten für diese Ausgänge von S_x-, S_y- und S_z-Messungen berechnen, wenn der Zustand als Superposition der S_x-Basiszustände oder der S_y-Basiszustände oder der S_z-Basiszustände gegeben ist.