Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

PK6 QUANTENMECHANIK SS 2019

ÜBUNGSBLATT 11, Abgabe: Do. 27.06.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 28.06.19.

1 **Dirac-Formalismus** (2 + 2 = 4 Punkte)

Seien $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ und $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\psi|\psi\rangle$, $\langle\chi|\chi\rangle$, $\langle\psi|\chi\rangle$, $\langle\chi|\psi\rangle$.

b) Berechnen Sie die dyadischen Produkte $|\psi\rangle\langle\psi|$, $|\chi\rangle\langle\chi|$, $|\psi\rangle\langle\chi|$, $|\chi\rangle\langle\psi|$.

2 **Orthogonale Zerlegung** (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)

Gegeben seien zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$. Sie wollen $|\psi\rangle$ schreiben als

$$|\psi\rangle = \lambda\,|\chi\rangle + |\phi\rangle \;, \tag{1}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\phi\rangle$ orthogonal zu $|\chi\rangle$ sein soll.

a) Zeigen Sie, dass diese Darstellung möglich und eindeutig ist, indem Sie explizite Berechnungsformeln für λ und $|\phi\rangle$ ausgedrückt durch $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ herleiten.

b) Berechnen Sie die Zerlegung (1) für den Fall $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

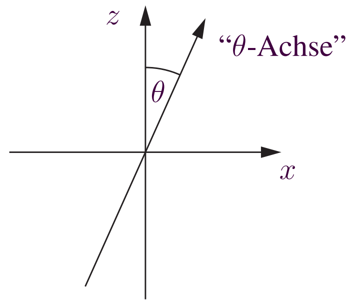
c) Veranschaulichen Sie die Bedeutung der Zerlegung (1) durch eine Skizze für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

Tipp: Je nach dem, ob Sie lieber abstrakt oder lieber konkret denken, kann es einfacher sein, die Teilaufgaben in einer anderen Reihenfolge zu lösen.

Bitte Rückseite nicht übersehen.

3 **Stern-Gerlach-Experiment** $(1 + 4 + 2 + 3 = 11$ Punkte)

Wir bezeichnen mit "θ-Achse" eine Achse in der x-z-Ebene, die mit der z-Achse den Winkel θ einschließt und zwar so, dass sie für $\theta = 90°$ mit der x-Achse inklusive deren Orientierung zusammenfällt. Mit $|\theta\rangle$ bezeichnen wir den Spin-$\frac{1}{2}$-Eigenzustand, der die Komponente $+\frac{\hbar}{2}$ in Richtung der (positiven) θ-Achse besitzt.



a) Wie viele Stern-Gerlach-Elemente müssen Sie in welcher Anordnung kombinieren, um experimentell die Wahrscheinlichkeit $\rho_\uparrow(\theta)$ zu bestimmen, welche definiert ist als die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $|\theta\rangle$ den Wert $S_z = \frac{\hbar}{2}$ zu messen.

b) Führen Sie diese Messung nun mit Hilfe der Simulation des Stern-Gerlach-Experiments auf[1]

`http://phet.colorado.edu/sims/stern-gerlach/stern-gerlach_en.html`

für so viele verschiedene Winkel θ zwischen 0° und 180° durch, dass Sie die Funktion $\rho_\uparrow(\theta)$ zeichnen können. Erraten Sie die Funktion $\rho_\uparrow(\theta)$. *Tipp:* sin, cos

c) Geben Sie einen normierten Zustand

$$|\theta\rangle = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

an, der die obigen Messergebnisse reproduziert und für den $\langle S_y\rangle = 0$ ist.

d) Zeigen Sie, dass der konstruierte Zustand $|\theta\rangle$ ein Eigenzustand des Operators

$$\hat{S}_\theta := \cos\theta\,\hat{S}_z + \sin\theta\,\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

ist und geben Sie den Eigenwert an.

Hinweis: Es gilt

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,, \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,.$$

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann Skalarprodukte und dyadische Produkte zwischen beliebigen Zuständen in beliebigen Basen berechnen. Ich kann für jeden Ket, den hermitesch konjugierten Bra angeben und umgekehrt. Ich kenne die Rechenregeln für das Skalarprodukt und dyadisches Produkt (insb. Linearität) und weiß, was beim Vertauschen der Faktoren passiert.
- Ich kann aus den Messwerten und den Eigenzuständen einer Observablen einen hermiteschen Operator kontruieren, für den die Eigenzustände die Eigenwertgleichung mit den Messwerten als Eigenwerte erfüllen.
- Ich kann einen Basiswechsel, den Kollaps eines Zustands und Erwartungwerte mit Hilfe von Operatoren effizient berechnen.

[1] Diese Simulation ist auch über die Moodle-Seite unseres Kurses erreichbar.