Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 12, Abgabe: Do. 04.07.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 05.07.19.

1 Hamilton-Operator und Schrödingergleichung (1 + 3 + 1 + 3 + 2 = 10 Punkte)

Gegeben ist der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \varepsilon \ ,$$

wobei ε eine positive Konstante mit der Einheit "Joule" ist.

a) Welche Bedingung muss ε erfüllen, damit $\hat{H}$ hermitesch ist?

b) Lösen Sie die Schrödingergleichung

$$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \ .$$

Normieren sie die Eigenzustände $|\psi_n\rangle$.

c) Zeigen Sie dass, die Eigenzustände orthogonal sind.

d) Berechnen Sie die Projektoren $\hat{P}_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ und bilden Sie die Operatoren

(i) $\sum_{n=1}^{2} \hat{P}_n$, (ii) $\sum_{n=1}^{2} E_n \hat{P}_n$.

e) In welchen Zustand entwickelt sich in diesem System der Zustand $|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Zeit $\Delta t = \dfrac{\pi\hbar}{2\varepsilon}$?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 **Zwei Observablen** $(1 + 4 + 2 + 3 = 10$ Punkte)

Gegeben ist ein Quantensystem mit dreidimensionalem Zustandsraum sowie zwei Observablen A und B. Die möglichen Messwerte von A sind $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ und $A_3 = -1$ mit den (normierten) Eigenzuständen $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ bzw. $|\alpha_3\rangle$. Wir benutzen diese Eigenzustände für die Vektornotation, d. h.

$$a\,|\alpha_1\rangle + b\,|\alpha_2\rangle + c\,|\alpha_3\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Die Observable B ist definiert über den Operator $\hat{B}$, welcher in dieser Notation die Matrixdarstellung

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt.

a) Geben Sie den zur Observablen A assoziierten Operator $\hat{A}$ als Matrix an.

b) Berechnen Sie die möglichen Werte B_i $(i = 1,2,3)$ der Observablen B und die zugehörigen (normierten) Eigenzustände $|\beta_i\rangle$ durch Lösen der Eigenwertgleichung.

c) Was sind die möglichen Messwerte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für die Messung von B für ein Teilchen im Eigenzustand von A mit Messwert 1?

d) Nachdem Sie das Quantensystem in den Zustand mit $A = 1$ versetzt haben, verlassen Sie kurzzeitig das Zimmer. Als sie wiederkommen, sehen Sie Ihren kleinen Bruder mit einem B-Messgerät das Zimmer verlassen. Mit welcher Messung (A oder B) prüfen Sie am geeignetsten, ob er sich an Ihrem Quantensystem zu schaffen gemachen hat und mit welcher Wahrscheinlichkeit würden Sie einen Eingriff seinerseits nachweisen können?

   Hinweis: Wir nehmen an, dass sämtliche Zustände stationär sind, d.h. dass sich die Wahrscheinlichkeiten in den Zeiten zwischen den Messungen nicht verändern.

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kenne die beiden Arten, wie in der Quantenmechanik Observablen definiert werden: entweder a) durch Angabe der Messwerte und der zugehörigen Eigenzustände, oder b) durch Angabe eines hermiteschen Operators. Insbesondere kann ich zwischen beiden Arten umrechnen, d.h. ich kann im Fall a) den assoziierten Operator finden und im Fall b) die Messwerte und die Eigenzustände.
- Ich weiß, wie man im Fall von entarteten Messwerten über die Eigenzustände buchführt und welche Modifikationen sich bei der Definition der Projektoren und assoziierten Operatoren ergeben.
- Ich weiß, dass die Observable "Energie" über die Angabe des Hamilton-Operators definiert ist und dass die Schrödingergleichung nichts anderes ist als die Eigenwertgleichung für diesen Operator. Ferner kann ich aus den Energien und den Energieeigenzuständen den Zeitentwicklungsoperator konstruieren und damit den Zustand des Systems zu einer Zeit t_2 aus dem Zustand zu einer anderen Zeit t_1 berechnen (sofern zwischen den Zeiten keine Messung erfolgt).