Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik
Thomas Klose, Sascha Peitzsch, José Enrique Álvarez Roca

Pk6 Quantenmechanik SS 2019

Übungsblatt 13, Abgabe: Do. 11.07.19 vor der Vorlesung,
Besprechung: in den Übungen am Fr. 12.07.19.

1 **Observable mit Entartung** $(4 + 2 + 4 + 2 = 12$ Punkte$)$

Eine Observable in einem System mit dreidimensionalem Zustandsraum $\mathcal{H}$ sei definiert durch den Operator

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die möglichen Messwerte und zugehörige, normierte und paarweise orthonormale Eigenzustände.

b) Berechnen Sie die Projektoren zu den Messwerten.

c) Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} .$$

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, die verschiedenen Messwerte zu messen? Wie groß sind der Erwartungswert $\langle A \rangle$ und die Unschärfe ΔA?

d) In welchen (normierten) Zustand kollabiert das System im Zustand $|\psi\rangle$ in Folge einer A-Messung?

Bitte Rückseite nicht übersehen.

2 Zeitentwicklung für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (4 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Wir betrachten ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit den orthonormalen Basiszuständen

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Durch geeignete Platzierung von Magnetfeldern geben wir dem System eine Energie, die durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, und erzeugen damit eine Zeitentwicklung. Hierbei ist $\varepsilon > 0$ eine Konstante mit der Einheit "Joule".

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Zustände

$$|\psi_1\rangle \sim \begin{pmatrix}+1\\\sqrt{2}\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle \sim \begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}, \qquad |\psi_3\rangle \sim \begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\0\\+1\end{pmatrix}, \qquad |\psi_4\rangle \sim \begin{pmatrix}+1\\0\\\sqrt{2}\\+1\end{pmatrix},$$

paarweise orthogonale Energieeigenzustände sind und lesen Sie die zugehörigen Energiewerte ab.

b) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ für dieses System.

c) Zweck der Magnetfelder sollte es sein, den Zustand $|\psi_{\text{Anf}}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ in den Zustand

$$|\psi_{\text{End}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\,\big)$$

zu überführen. Wie lange müssen wir die Magnetfeldern einschalten, damit genau diese Umwandlung stattfindet?

Neue Lernziele erreicht?

- Ich kann die Eigenzustände zu entarteten Messwerten berechnen. Insbesondere kann ich Basiseigenzustände definieren, die paarweise orthogonal sind. Ich kann den kollabierten Zustand berechnen, wenn ein entarteter Messwert gemessen wurde.
- Ich kann Quantensysteme (mit endlich dimensionalem Zustandsraum) zu zusammengesetzten Quantensystemen mittels Tensorprodukt kombinieren. Ich weiß, wie sich eine Vektornotation der Zustände des zusammengesetzten Systems aus der Vektornotation der Zustände der einzelnen Quantensysteme aufbauen lässt. Und ich weiß, wie die Matrixdarstellung von Operatoren der einzelnen Quantensysteme zu erweitern ist, um damit auf Zustände des zusammengesetzen Systems wirken zu können. Ich bin insbesondere mit dem Produktsystem aus zwei oder mehreren Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen alias Qubits vertraut.