

Doppeldrehung und Polarisation

Johannes Grebe

(aus: *Elemente der Naturwissenschaft* 75, Nr. 2, 2001)

Gestalt wirkt auf Gestalt.¹

Rudolf Steiner

Einleitung

Veränderungen, die sich für Ansichten unserer Umgebung durch eine sogenannte Polarisationsfolie ergeben, legen nahe, den Übergang vom Hellbild zum Dunkelbild in der Beziehung zwischen Polarisator P und Analysator A genauer zu untersuchen. Dass sich die freie Durchsicht durch zwei halbtransparente optische Mittel in der Variation ihrer räumlichen Beziehung zum undurchsichtigen Dunkelbild abschließt, lässt einen immer auf's Neue erstaunen. Worum handelt es sich hier?

Mit Hilfe des Haidinger-Büschels² lassen sich die Hauptachsen der Folien identifizieren. Dann gilt für die Ansicht einer hellen Fläche durch A und P : Haben wir das *Hellbild*, so sind die Richtungen der auf A und P bezogenen Haidinger-Büschel *parallel*, haben wir dagegen das *Dunkelbild*, stehen diese Richtungen *senkrecht* zueinander. Der Übergang vom Hellbild zum Dunkelbild ist eine Funktion des Richtungswinkels (Malus-Gesetz).

¹Dieses Zitat ist der Mitschrift eines Vortrages entnommen, den Rudolf Steiner im Rahmen des Zweiten Naturwissenschaftlichen Kurses am 9. März 1920 in Stuttgart vor Lehrern der Waldorfschule und einigen Gästen gehalten hat. Steiner erläutert darin das erweiterte Spektrum der Natur und die Beziehungen zwischen den einzelnen Gebieten dieses Spektrums. Im Zusammenhang mit dem sogenannten U-Gebiet kommt er dabei auf Polarisationserscheinungen zu sprechen, die immer "unter dem Einfluss der Wirkung des Gestalteten aufeinander" entstehen. Im Weiteren werden Beziehungen der Polarisation zu anderen Gebieten des Spektrums charakterisiert. Diese Zusammenhänge zu *denken* fällt mir auch nach Jahren äußerst schwer. Indem ich oben stehenden Satz zitiere, will ich deshalb *nicht* den Anschein erwecken, als enthielten die Ausführungen dieses Artikels etwa eine beispielhafte Erläuterung der Hinweise Steiners. Dazu müsste ich diese verstanden haben. Das ist nicht der Fall. Deshalb *zitiere* ich sie. Die Frage, wie das Verhältnis zu Erscheinungen der Natur gestaltet werden kann, sodass sie im Menscheninnern zu sprechen beginnen, erhebt sich auch gegenüber den Denkgestaltungen Rudolf Steiners. In diesem Sinne versteht sich der vorliegende Artikel als Verständigungsangebot zur Ausbildung einer Frage, auf die der zitierte Satz eine Antwort sein kann. Georg Maier hat in "Die Elemente als Stufen der Naturbetrachtung" gezeigt, wie in den Erscheinungen des Festen, Flüssigen, Gasigen und der Wärme *selbst* Hinweise zur Ausbildung ihnen gemäßer Betrachtungsweisen gefunden werden können und wie dabei aus dem Betrachter ein *Teilnehmer* wird [Mai70]

²Das Haidinger-Büschel, benannt nach seinem Entdecker Wilhelm Karl Haidinger, ist eine zarte Farbercheinung, mit der das Auge auf den Anblick einer linear polarisierten Ansicht antwortet. Es hat eine Größe von $2 - 4^\circ$ und erscheint in der Mitte des Gesichtsfeldes. Es ist – ähnlich den Nachbildern – ein Kontrastphänomen und muss immer erneut hervorgerufen werden. Das kann durch Änderung der Netzhautorientierung, d.h. durch Hin- und Herwiegen des Kopfes geschehen, oder durch Veränderung der Polarisationsrichtung der angeblickten Fläche. Das geht am besten mit einer Polarisationsfolie, durch die man eine weiße Fläche anblickt, während man sie in der Ebene senkrecht zur Blickrichtung mit kurzen Pausen hin- und herdreht. Die Richtung des dabei erscheinenden Büschels ist mit der Orientierung der Folie fest verbunden, d.h. es dreht sich mit. – Eine ausführliche Würdigung des Haidinger-Büschels ist gegeben in [Prö98].

Das Zusammenwirken zweier Linearpolarisatoren nach der beschriebenen Art besteht im luft-erfüllten, durchsichtigen Raum. Der optische Abstand zwischen A und P und die relative Orientierung der Blickrichtung spielen für die beschriebene Helligkeitscharakteristik keine Rolle. Das ändert sich, sobald ein optisches Mittel zwischen A und P zum Beispiel doppelbrechend ist: Aufhellung des Dunkelbildes, Abdunkelung des Hellbildes, leuchtende Farben treten auf – ein zunächst verwirrendes Spiel zwischen Durchsichtigkeit und Undurchsichtigkeit in farbigen Übergängen. Optische Mittel, die solches hervorbringen, finden sich in großer Zahl. Bekannt sind die Experimente mit einfacher Frischhaltefolie, Tesafilm, Cellophan beziehungsweise mit den natürlichen anisotropen Mineralien wie Glimmer, Quarz etc., die hier in Frage kommen [Hec99]. Wegen der Veränderung, die solche Mittel³ zwischen A und P am Bild bewirken, werden sie auch *Transformatoren* genannt.

Die Behandlung der Farben, die in solchen Experimenten auftreten, übersteigt den Rahmen dieses Artikels. Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Bildhelligkeit. In diesem Sinne werden im folgenden einfarbige Bilder betrachtet. Ein Bild ist dann eine durch das optische Ensemble A , T und P ⁴ vorgenommene Ansicht z.B. einer roten Leuchte. Das Helligkeitsmaß des Bildes hängt offensichtlich zum einen von den Winkelstellungen zwischen T und P ab: Es gibt Stellungen, bei denen das Bild keine Veränderung zeigt; der Wandel der Bildhelligkeit unter Drehungen des Analysators entspricht für diese Stellungen von T dem Malus-Gesetz. Dann gibt es aber auch solche, bei denen das Bild eine maximale Abweichung von der Malus-Charakteristik zeigt: Wo wir vorher ohne T bei gekreuzten Folien P und A das undurchsichtige Dunkelbild erhielten, ist mit dazwischengeschobenem T das Bild durchsichtig bzw. aufgehellt und umgekehrt: das ursprüngliche Hellbild bei parallelen Folien P und A erscheint mit dazwischengeschobenem T abgedunkelt. Es zeigt sich zum andern, dass verschiedene Schichtdicken für T das Abweichen vom Malus-Gesetz unterschiedlich stark hervortreten lassen, und es wird vermutet, dass sich für eine kontinuierliche Zunahme der Schichtdicke das Verhalten dieses Abweichens über Maxima und Minima wiederholt.

Eine genauere Betrachtung und Ordnung dieser Erscheinungszusammenhänge soll im Folgenden vor dem Hintergrund zweier Hinweise unternommen werden. Der erste stammt von Wilhelm Karl Haidinger (1795-1871) und bezieht sich auf Beobachtungen mit dichroitischen und doppelbrechenden Medien [Hai44, Hai46]. Der zweite stammt von Mario Howald-Haller (1925-2001) und betrifft einen Ansatz zum messenden Erfassen der richtungsabhängigen Helligkeit beim Zusammenwirken von Polarisationszuständen [How64].

³Dazu gehören auch alle *optisch aktiven* Substanzen, auf die in diesem Zusammenhang aber nicht näher eingegangen wird.

⁴Zur Schreibweise: Die jeweils in Betracht kommenden optischen Elemente werden im Folgenden in eckige Klammern gesetzt: $[A, T, P]$. Die Reihenfolge der Aufzählung ist, so weit es sich um subjektive Versuche handelt, immer diejenige, in der die Elemente vom Auge weg zur angeblickten Fläche hin angeordnet sind.

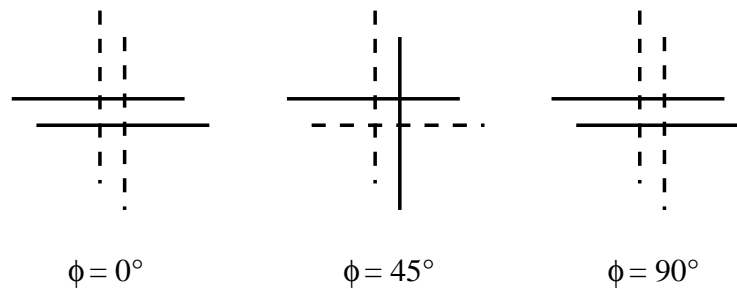


Abbildung 1: Die Stellungen der Haidinger-Büschel, die sich beim Blick durch $[T(\phi), P]$ zeigen, jeweils bezogen auf das vertikale Büschel von P , für eine Drehung von T um $\phi = 90^\circ$. (Die Gelbrichtung der Büschel ist gestrichelt, die Blaurichtung durchgezogen gezeichnet; vgl. Fußnote 7.)

1 Doppeldrehung

Haidinger schildert die Beobachtung der nach ihm benannten Büschel beim Blick durch dünne Glimmer-Blättchen auf eine "polarisierte Lichtfläche". Dabei macht er die Entdeckung, dass bei einer Drehung des Blättchens um die Blickrichtung mit ϕ das Büschel mit 2ϕ in Drehrichtung vorausleitet. Hält er dagegen das Blättchen fest und dreht stattdessen die Polarisationsrichtung der Fläche mit ϕ , so dreht sich das Büschel mit $-\phi$, also gleichschnell aber in entgegengesetzter Richtung.

In beiden Fällen gilt: Die Winkeldistanz zwischen dem Büschel der polarisierten Fläche und demjenigen, welches beim Blick durch das Glimmer-Blättchen auf die Fläche gesehen wird, ist immer doppelt so groß wie der ausgeführte Drehwinkel. Deshalb sprechen wir hier von "Doppeldrehung"⁵. Das bedeutet: Immer dann, wenn eine Hauptachse G des Glimmer-Blättchens parallel oder senkrecht zur Polarisationsrichtung P der Fläche steht, d.h. für $\phi = n \cdot 90^\circ$ mit $n = 0, 1, 2, 3$, sind die Büschelrichtungen parallel; die Wirkung des Glimmer-Blättchens auf den Bildzustand verschwindet. Wir bezeichnen deshalb die Zustände für $\phi = n \cdot 90^\circ$ als *entspannte* Bildzustände. Für $\phi = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$ mit $n = 0, 1, 2, 3$ stehen die Büschel dagegen senkrecht; die Abweichung der Büschelstellung für $[T, P]$ von derjenigen für P allein bzw. die Wirkung des Glimmer-Blättchens auf den Bildzustand wird maximal. Wir bezeichnen deshalb die Zustände für $\phi = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$ als *angespannte* Bildzustände.

⁵Die Bezeichnung "Doppeldrehung" kommt bei Haidinger nicht vor. Sie hat sich in Gesprächen mit David Auerbach und Wilfried Sommer als nützlich erwiesen.

2 Polarisation und Skalarprodukt

Howald-Haller schlägt die Darstellung von linear polarisierten Zuständen durch Vektoren vor⁶. Ordentliche und außerordentliche Bilder eines Doppelspates sind senkrecht zueinander linear polarisiert. Sie werden – bezogen auf ein Koordinatensystem – charakterisiert durch: $\mathbf{h} = (1,0)$: horizontal linear polarisiert, und $\mathbf{v} = (0,1)$: vertikal linear polarisiert. Die Verknüpfung wird in der Art des skalaren Produktes vollzogen. Im Falle der Quadratur (Winkel α zwischen den Polarisationsrichtungen gleich 90° , 270°) ergibt sich $(1,0)(0,1) = (0,1)(1,0) = 0$, d.h. Auslöschung. Im Falle der Konjunktion ($\alpha = 0^\circ$) wird $(1,0)(1,0) = (0,1)(0,1) = 1$, d.h. das Hellbild ist erhalten. Dasselbe gilt bei Opposition ($\alpha = 180^\circ$). Die Zwischenstellungen ergeben Zwischenhelligkeiten, die sich gemäß dem Malus-Gesetz durch Gewichtung mit dem Quadrat des Richtungscosinus ergeben: $I(\alpha) = I_0 \cos^2 \alpha$.

Der Hinweis, der hiermit gegeben ist, wird so verstanden: Die räumlichen Gestaltungen der optischen Elemente Polarisator und Analysator sind durch Richtungen⁷ P und A ausgezeichnet, die multiplikativ aufeinander bezogen werden, indem der Vektor \mathbf{e}_p der Richtung P auf die Richtung A projiziert wird. Das geschieht durch skalare Multiplikation von \mathbf{e}_p mit \mathbf{e}_a : $\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_a = \cos \alpha$. Dabei ist α der Richtungswinkel zwischen P und A . Die Polarisationsrichtung des durch A vor P gesehenen Bildes ist dann durch die Richtung A gegeben, die Helligkeit – bezogen auf das Hellbild ($\alpha = 0^\circ$) – durch das Quadrat des Produktes $\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_a$ (Abbildung 2 auf der nächsten Seite).

⁶Die von dem amerikanischen Physiker R. Clarke Jones Anfang der vierziger Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelte Vektor-Darstellung [Jon41] zur Beschreibung von Polarisationszuständen kohärenter Strahlenbündel gibt für die linearen P -Zustände Ausdrücke an, die formal identisch sind mit den von Howald-Haller vorgeschlagenen. Der Ausgangspunkt ist dagegen jeweils ein anderer. Jones beschreibt mit P -Zuständen Zustände eines in der Vorstellung zugrunde gelegten Lichtwellenfeldes, das durch den elektrischen Feldvektor repräsentiert wird. Die Zerlegung dieses Vektors führt über die Wahl geeigneter komplexer Phasenfaktoren zu Sätzen orthonormierter Vektoren, deren Linearkombinationen die Darstellung jedes beliebigen P -Zustandes gestatten. Im Gegensatz dazu und im Sinne des hier angestrebten Vorgehens geht Howald-Haller von *Erscheinungen* aus, d.h. von Ansichten einer hellen Fläche, die durch Ensembles optisch anisotroper Mittel betrachtet wird. Dabei besteht kein Anlass, von Vorgängen mit Strahlenbündeln zu sprechen. P -Zustände sind *Bildzustände*, die mit geordneten Beobachtungshandlungen verknüpft sind. Die räumlichen Gestaltungen der beteiligten optischen Mittel sind durch Richtungen ausgezeichnet. Diese werden durch normierte Vektoren dargestellt. Die Beziehungen zwischen den Mitteln sind multiplikativ; sie erscheinen im Bild charakteristischer Helligkeitsverläufe zwischen Hell- und Dunkelbild. Dem entspricht das Skalarprodukt zwischen den zugehörigen Vektoren bzw. das Quadrat desselben als Funktion der beteiligten Winkel.

⁷Bisher haben wir die Orientierung der Folie auf die Ausrichtung des zugehörigen Haidinger-Büschels bezogen. Howald-Haller bezeichnet diese Büschelrichtung – der Farbigkeit des Büschels folgend – als "Gelbrichtung". Sie fällt bei der Polarisationsfolie mit deren Hauptachse zusammen. Senkrecht zur "Gelbrichtung" steht die "Blaurichtung". Welche der beiden als Polarisationsrichtung ausgezeichnet wird, ist im Prinzip beliebig. Haidinger folgt dem Augensehein und bezeichnet die "Gelbrichtung" als Polarisationsrichtung. Damit steht er im Widerspruch zur Konvention im Rahmen des Wellenmodells. Um der formalen Übereinstimmung mit dieser Konvention Willen identifizieren wir die Polarisationsrichtung mit der Blaurichtung. In diesem Sinne sind hier P und A die Blaurichtungen der zugehörigen Büschel.

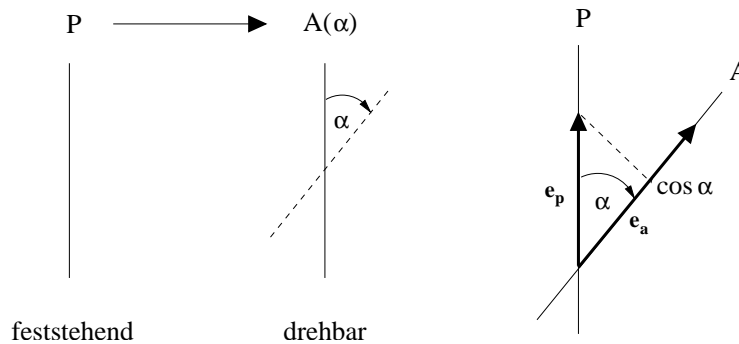


Abbildung 2: Die räumliche Beziehung von P auf A über das Skalarprodukt.

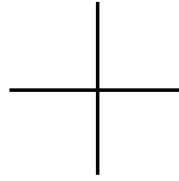
3 Orientierung

Im Folgenden werden zunächst die Beobachtungen Haidingers nachvollzogen, um die Bedingungen der "Doppeldrehung" noch genauer kennen zu lernen. Der rhythmische Wechsel von *Anspannung* und *Entspannung* des Bildes, bezogen auf die in Gedanken festgehaltene Stellung des Haidinger-Büschels für P (Abbildung 1 auf Seite 3) wird dann durch einen weiteren Linearpolarisator A angeschaut. Das räumliche Zusammenspiel von P und $T(\phi)$ wird damit auf eine weitere Richtung A bezogen, und die Beziehung zwischen $T(\phi)$ und P erscheint im Bild eines charakteristischen Helligkeitwandels, der vom Malus-Gesetz abweicht.

Jeder Stellung zwischen T und P kann mit A ein Helligkeitwert I zugeordnet werden. φ_P , φ_A sind die Winkel zwischen P und T bzw. T und A . I ist außerdem eine Funktion der Schichtdicke δ von T . Es ergeben sich Bildfolgen, in denen die räumlichen Variationen zwischen A , T und P in Abhängigkeit von δ angeschaut werden können. Der innere Zusammenhang dieser Bilder ist in den Ordnungen ihres Erscheinens selbst gegeben. Solche Ordnungen sind: Zyklizität, Symmetrien, sog. Malus-Linien. Ein analytischer Ausdruck für $I(\varphi_P, \varphi_A, \delta)$ ergibt sich schließlich durch geeignete Anwendung des Ansatzes von Howald-Haller "Polarisation und Skalarprodukt" auf das Ensemble $[P, T, A]$.

4 Doppelbrechung – Doppeldrehung

Das Glimmer-Blättchen wird von Haidinger stellvertretend für diejenigen optischen Mittel genannt, welche die von ihm entdeckte Doppeldrehung des Büschels zeigen, und das sind im wesentlichen *doppelbrechende* Kristalle. Die räumliche Gestaltung solcher Mittel wird im Gegensatz zu derjenigen des Linearpolarisators durch ein *rechtwinkliges Richtungskreuz* charakterisiert:



Damit wird den beiden Richtungen der Doppelbrechung bzw. den in der Doppeldrehung erscheinenden Symmetrieverhältnissen Rechnung getragen – ohne dass jedoch die Beziehung zwischen Bündel und doppelbrechendem Mittel dadurch schon näher bestimmt ist. Wir erinnern uns ferner, dass die beiden Teilbilder, die ein Doppelspat von einem Urbild zeigt, unterschiedlich stark gehoben erscheinen. Das sogenannte *außerordentliche* Bild kann dabei aus dem *ordentlichen* Bild herausgeschoben gedacht werden, und zwar nach Maßgabe der Querwirksamkeit einer zweiten optischen Dichte n_a , die senkrecht zu derjenigen wirksam ist, die sich in der Hebung des ordentlichen Bildes zeigt (n_o).⁸

Als *Maß* der Doppelbrechung kann zunächst der Abstand genommen werden, den die beiden Teilbilder bei senkrechtem Blick durch Kristalle gleicher Dicke voneinander haben. Entscheidend dafür ist aber die Brechzahldifferenz $\Delta = n_a - n_o$, welche die maximale unterschiedliche Gewichtung der optischen Wege im Kristall zum Ausdruck bringt, je nach dem, ob sie parallel oder senkrecht zur optischen Achse liegen.

Für unsere Zwecke wählen wir als Transformator einfache Frischhaltefolie. Das hat den Vorteil, dass wir die Dicke δ schichtweise ändern können. Die Wirkung von T auf das Bild zeigt sich damit als Funktion der Schichtdicke beziehungsweise der Anzahl gleich dicker Folienschichten.

Auf der Grundlage der sich ergebenden Beobachtungen wird es möglich sein, δ als Zusammenfassung der räumlichen Bedingungen, die für die Doppelbrechung in dem hier untersuchten Rahmen eine Rolle spielen, noch näher zu charakterisieren. Das ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn nach einem analytischen Ausdruck für den Helligkeitswandel der Bilder gesucht wird (Abschnitt 6 auf Seite 14).

T zeigt im Durchblick für sich genommen weder eine orientierungsabhängige Helligkeitsänderung noch ein Haidinger-Bündel. Letzteres tritt erst auf, wenn durch T auf eine linear polarisierte Fläche geblickt wird bzw. wenn T ein Linearpolarisator P vorausgeht (z.B. eine Polarisationsfolie). Dabei ist auf die Reihenfolge⁹ zu achten: Nur die Durchsicht durch T auf P zeigt das doppelbrechende Haidinger-Bündel. Wird diese Reihenfolge vertauscht, kann zwar mit P ein Bündel hervorgerufen werden; dieses ist jedoch mit der räumlichen Orientie-

⁸Für Kristalle, bei denen die Hebung des ordentlichen Bildes diejenige des außerordentlichen überwiegt: $n_o > n_a$, ergibt die Differenz der Brechzahlen $\Delta = n_a - n_o$ einen negativen Wert; sie werden deshalb optisch *negativ* doppelbrechend genannt (z.B. Calcit, Turmalin, Beryll). Entsprechend heißen Kristalle mit $n_o < n_a \Rightarrow n_a - n_o > 0$ optisch *positiv* doppelbrechend (z.B. Quarz, Rutil, Eis).

⁹Die Reihenfolge der Aufzählung $T, P \dots$ ist hier und im Folgenden immer die Reihenfolge, in der die optischen Elemente vom Auge weg zur angeblickten Fläche hin angeordnet sind.

zung von P fest verbunden, d.h. es ist nicht doppeldrehend, sondern einfach mitdrehend und erscheint auch ohne T .

Für den durch das doppeldrehende Haidinger-Büschel ausgezeichneten Bildzustand gilt damit:

T und P sind nicht vertauschbar \Leftrightarrow Die Blickrichtung durch das optische Ensemble $[P, T]$ ist nicht umkehrbar.

Ferner: Das doppeldrehende Büschel erscheint nur, wenn die räumliche Beziehung zwischen P und T verändert wird; es scheint selbst Ausdruck dieser Beziehung zu sein.

Pröbstl hat gezeigt, dass sich die Erscheinungsweisen des Haidinger-Büschels in Stufen gliedern lassen [Prö98]:

- (a) das *Atmosphärenbüschel*, zu sehen am blauen Himmel, besonders deutlich senkrecht zur Sonne: immer auf Großkreisen durch die Sonne liegend und damit nach dieser weisend;
- (b) das *Oberflächenbüschel*, zu sehen unter Brewster-Winkel z.B. im Spiegelbild einer hellen Wolke in einer Pfütze: immer auf den Beobachter gerichtet;
- (c) das *Festkörperbüschel*, hervorgerufen mit dichroitischen Kristallen: immer mit der räumlichen Orientierung derselben fest verbunden, d.h. mitdrehend und dadurch auf diesem Wege leicht hervorzurufen.

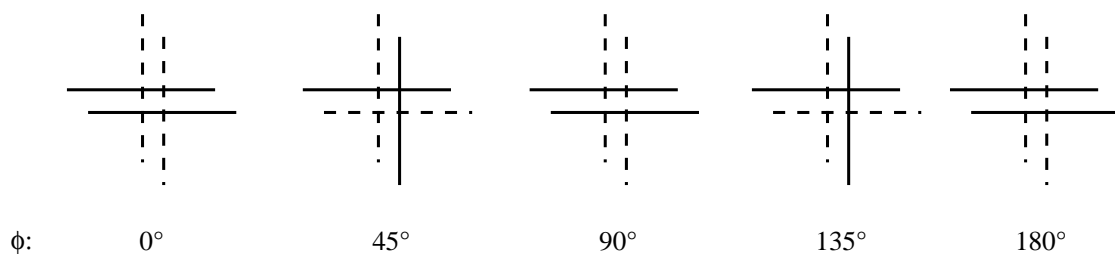


Abbildung 3: Zwei Doppeldreher-Zyklen für eine Drehung von T bzw. P .

Vor diesem Hintergrund stellt die Beobachtung der beschriebenen Doppeldrehung eine weitere Stufe dar: Die Bewegung des Büschels ist hier nur noch mittelbar korreliert mit einer Raumgestalt. Sie ist vielmehr eine Funktion der Beziehung zwischen den Gestaltungen zweier Körper (hier T und P). Wir schlagen deshalb die Bezeichnung *Beziehungsbüschel* vor.

In der Abbildung 3 sind die Büschelstellungen des Ensembles $[T(\phi), P]$ für eine Drehung von $\phi = 180^\circ$ dargestellt, bezogen auf die vertikale Büschelstellung, die sich für P allein ergäbe.

Charakteristisch ist der Wechsel zwischen parallelen und senkrechten Büschelstellungen, – zwischen *entspannten* und *angespannten* Bildzuständen in Schritten von $\Delta = 45^\circ$. Der sogenannte *Doppeldreher-Zyklus* ist mit einer Zykluslänge von $\phi = 90^\circ$ bzw. $\alpha_D = 4\phi$ halb



Abbildung 4: Der Malus-Zyklus, ausgehend vom Hellbild ($A \parallel P$) mit $\alpha_M = 2\phi$.

so lang wie derjenige, der sich für den Wechsel zwischen Hellbild und Dunkelbild nach dem Malus-Gesetz ergibt. Diese im folgenden *Malus-Zyklus* genannte Helligkeitscharakteristik mit dem räumlichen Drehwinkel von $\phi = 180^\circ$ und folglich dem Zykluswinkel von $\alpha_M = 2\phi$ bildet bezüglich der weiteren Beobachtungen eine Art Helligkeitsnormal.

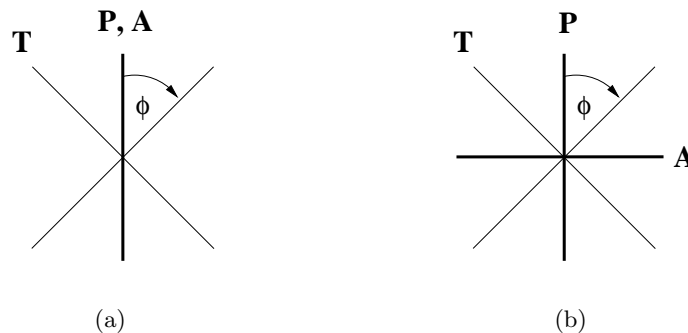


Abbildung 5: Drehung von T zwischen A und P mit $A \parallel P$ (a) und $A \perp P$ (b).

Die Bildzustände der beiden Doppeldreher-Zyklen in Abbildung 3 werden nun durch einen Analysator A betrachtet. Dabei ergeben sich mit zunehmender Schichtdicke δ von T zwei Bildfolgen: eine für *parallele* Richtungen A und P , d.h. ausgehend vom Hellbild des Malus-Zyklus, und eine für *gekreuzte* Richtungen A und P , d.h. ausgehend vom Dunkelbild.

Als Transformator $T(\phi, \delta)$ wird möglichst dünne, doppelbrechende Frischhaltefolie verwendet¹⁰. δ ist in diesem Fall die Anzahl solcher mit gleicher Hauptachsenlage geschichteter Frischhaltefolien.

Bei den Abbildungen 6 und 7 handelt es sich jeweils um die Überlagerung zweier Zyklen: Der horizontale ist durch den Drehwinkel ϕ bzw. den Zyklus-Winkel $2\alpha_D$, der vertikale durch die Schichtdicke δ parametrisiert. In den Stellungen von $T(\phi, \delta)$ mit $\phi = n \cdot 90^\circ$, den *entspannten* Bildzuständen, geht das Bild, unabhängig von der Folienanzahl δ , jeweils in das Hellbild (Dunkelbild) des Malus-Zyklus' über. Das Bild ist für $[A, T(n \cdot 90^\circ, \delta), P]$ sozusagen *unemp-*

¹⁰Je dünner die Folie ist, desto feiner ist die Auflösung der Zwischenzustände eines Zyklus'. Die hier verwendete Folie ist so ausgesucht, dass die Zyklusmitte relativ exakt mit einer geraden Anzahl von Schichten zusammenfällt.

$[A, T(\phi, \delta), P]$ für $A \parallel P$:

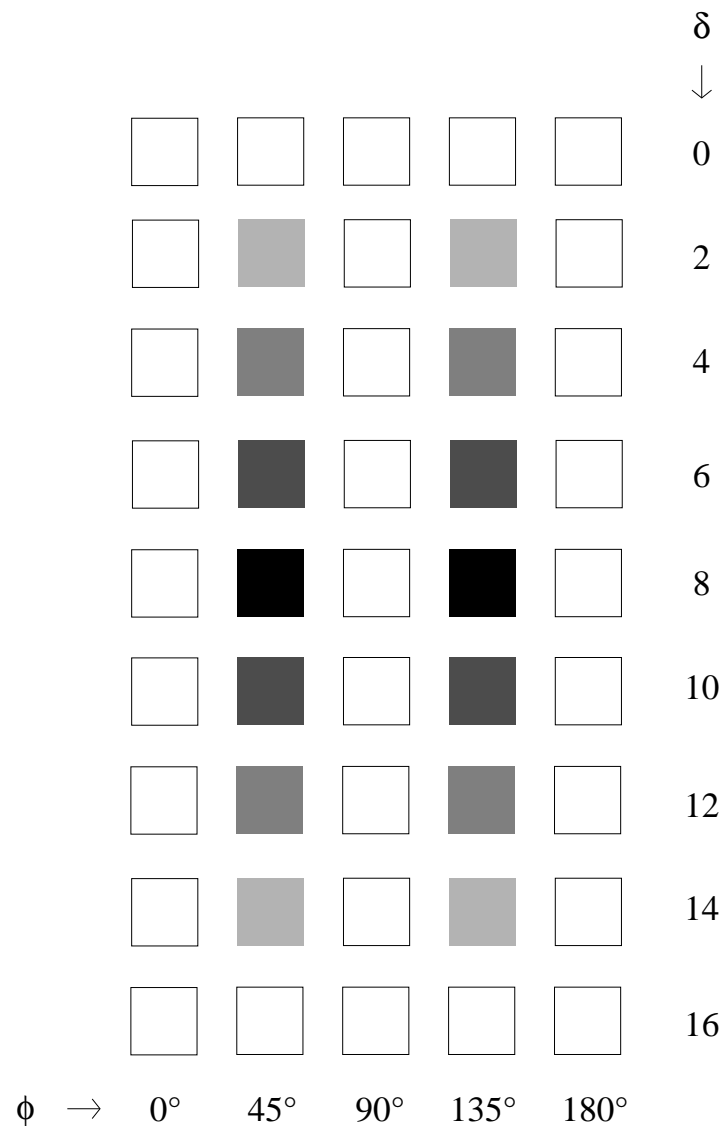


Abbildung 6: Überlagerung von Doppeldreher- und Schichtenzyklus, ausgehend vom Hellbild.

findlich gegen den Transformator: Es bleibt als Bild des Malus-Zyklus' erhalten. Die Linien, auf denen solche Bilder liegen, nennen wir deshalb Erhaltungs- bzw. *Malus-Linien*.

Im Gegensatz dazu zeigt sich für die Zwischenstellungen mit $\phi = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$, d.h. für die *angespannten* Bildzustände, mit zunehmender Folienanzahl δ eine Abweichung vom Hellbild (Dunkelbild): Mit acht Transformator-Folien erleidet das Hellbild eine Abdunkelung bis zum Dunkelbild, das Dunkelbild eine Aufhellung bis zum Hellbild. Die "Interpretation" der angespannten Bildzustände durch δ wird mit acht Folien sozusagen maximal.¹¹ Mit weiteren acht

¹¹Die Wirkung der Schichtdicke als "Interpretation" des angespannten des Zustandes aufzufassen, geschieht im Ausblick auf die mit natürlicher Beleuchtung auftretenden *Farben*. Die Entartung der symmetrisch zu der

$[A, T(\phi, \delta), P]$ für $A \perp P$:

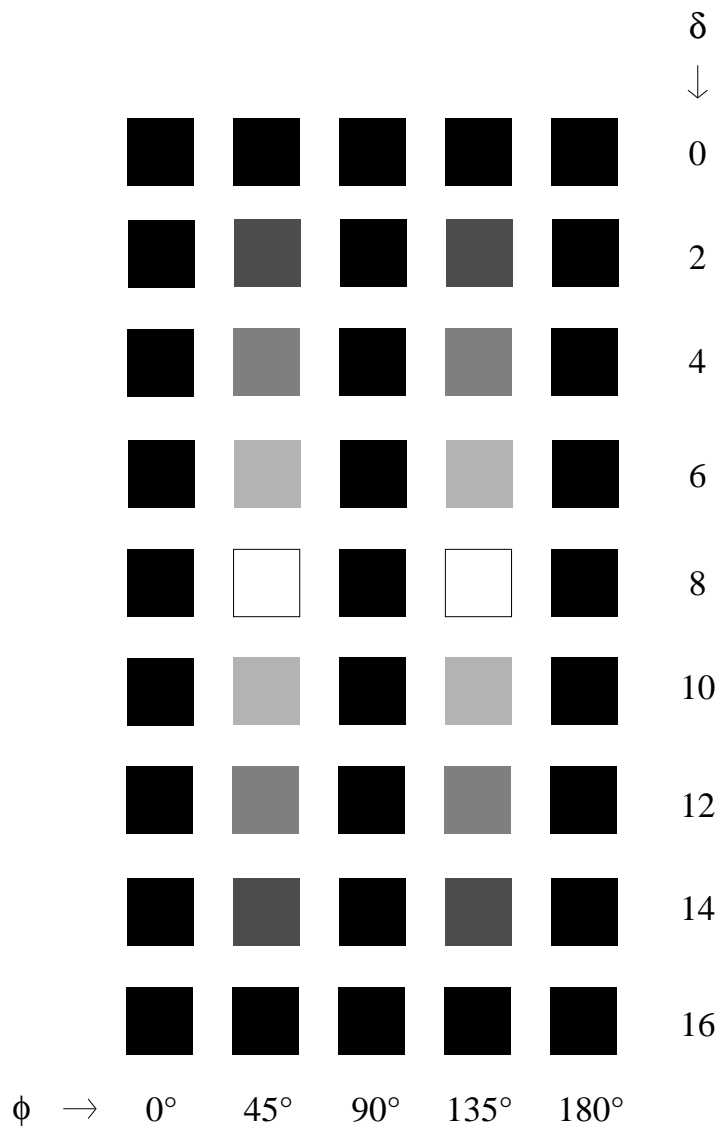


Abbildung 7: Überlagerung von Doppeldreher- und Schichtenzyklus, ausgehend vom Dunkelbild.

Folien gehen beide Bilder wieder in ihre Ausgangszustände über und der *Doppeldreherzyklus* beginnt von neuem.

Es gibt damit zwei Wege, die Wirksamkeit von T auf den Bildzustand zu ermöglichen: *Kontinuierlich*: Drehung von T mit einer bestimmten Schichtdicke δ_0 aus einem entspannten in

Zyklusmitte liegenden, gleich hellen Bilder in den Abbildungen 6 und 7 wird damit aufgehoben: Der Übergang des Hellbildes in das Dunkelbild geht in unserem Fall für $\delta = 0 \rightarrow 16$ Schichten über Abdunkelfarben gelb \rightarrow rot (\rightarrow undurchsichtig); derjenige des Dunkelbildes in das Hellbild über Aufhellfarben violett \rightarrow blau (\rightarrow durchsichtig). Die den Abbildungen 6 und 7 entsprechenden farbigen Bildreihen sind mit einem Kommentar im Anhang beigefügt.

einen angespannten Bildzustand: $\phi = n \cdot 90^\circ \rightarrow (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$. *Diskret*: Erhöhen der Folienanzahl δ in einem angespannten Zustand, z.B. bei $\phi = 45^\circ$.

5 Polarisationszustände

Nach der Betrachtung des Wechsels zwischen entspannten und angespannten Zuständen im Bild des Doppeldreher-Zyklus erhebt sich die Frage, wie sich für gegebene Winkel φ_P zwischen P und T der Polarisationszustand des durch $[T, P]$ gesehenen Bildes mit zunehmender Schichtdicke δ ändert.¹² Wie im vorangegangenen Abschnitt soll sich das im Bild einer Helligkeitscharakteristik ergeben, die durch den Drehwinkel φ_A eines Analysators bzw. einen Zyklus-Winkel α parametrisiert ist.

Für $\varphi_P = n \cdot 90^\circ$, d.h. für die entspannten Zustände haben wir die Frage im letzten Abschnitt bereits beantwortet: Das Bild ist unempfindlich gegenüber T ; der Malus-Zyklus ist erhalten. Für die angespannten Zustände mit $\varphi_P = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$ ergibt sich die in Abbildung 8 auf der nächsten Seite dargestellte Bildfolge. Der Analysator wird dabei für jede Schichtdicke δ einmal um $\varphi_A = 180^\circ$ gedreht.

Auffallend in Abbildung 8 auf der nächsten Seite sind zunächst die Malus-Linien für $\varphi_A = 90^\circ, 180^\circ$. Das sind Stellungen, in denen A mit einer Hauptachse von T zusammenfällt. Aus der umgekehrten Sicht: $[P, T, A]$ ¹³, d.h. bezüglich $[T, A]$ sind das entspannte Zustände. In Abbildung 8 zeigt sich damit der gleiche Rhythmus wie in den Abbildungen 6 und 7. Dadurch allerdings, dass nicht Hell- oder Dunkelbilder erhalten sind, sondern T für die *Diagonalstellung* von A und P , d.h. für den halbhellen/halbdunklen Mittelzustand des Malus-Zyklus' unwirksam wird, zeigt sich noch etwas Neues:

T wirkt mit zunehmender Schichtdicke offenbar so, dass die Ausprägung der Hell- und Dunkelbilder in den angespannten Zuständen $\varphi_A = 45^\circ, 135^\circ$ und 225° immer schwächer wird, bis bei vier Folien die Malus-Charakteristik ganz aufgehoben ist: Die ausgeglichene Bildhelligkeit ist hier *invariant unter Drehungen des Analysators*. Mit weiter zunehmender Schichtdicke kehren Hell- und Dunkelbild über Zwischenzustände zurück, aber für jeweils senkrechte Stellungen von A : bei $\varphi_A = 45^\circ, 225^\circ$ das Dunkelbild und bei $\varphi_A = 135^\circ$ das Hellbild (Abbildung 6; für Abbildung 7 gelten entsprechend umgekehrte Verhältnisse). Bezüglich der Ausgangsbilder sind Hell- und Dunkelbild also vertauscht. Das ist für acht Folien der Fall und wir sind in der Mitte des Zyklus' angekommen. Weitere Schichten liefern das Spiegelbild des bisherigen Verlaufes: Bei zwölf Schichten zeigt sich ein zweites Mal die Unempfindlichkeit des Bildes für

¹²Es wird angestrebt, die Definition von *elliptischen* und *zirkularen* Polarisationszuständen ebenfalls auf charakteristische Helligkeitsänderungen des Bildes in Abhängigkeit von der Analysatorstellung abzustützen (vgl. [Dus97]).

¹³Darin, dass es auch für $\varphi_P = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$ Malus-Linien gibt, macht sich die Symmetrie des Ensembles $[A, T, P]$, d.h. die Umkehrbarkeit der Blickrichtung geltend. Es gilt: $[A, T, P] = [P, T, A]$.

$[A(\varphi_A), T(\delta), P(\varphi_P = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ))], \varphi_A = 45^\circ \rightarrow 225^\circ$:

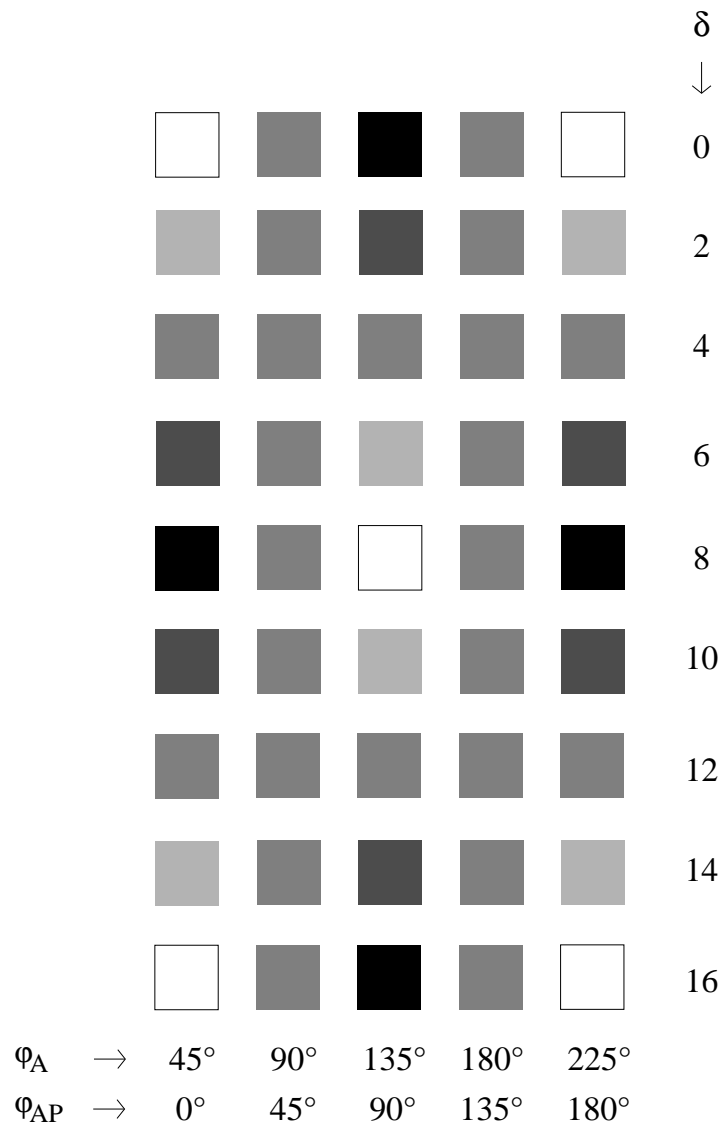


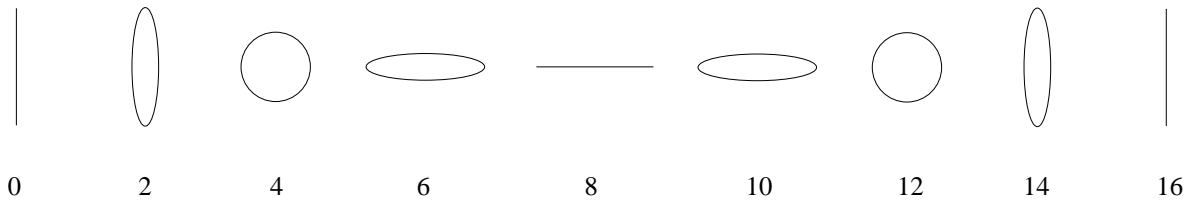
Abbildung 8: Überlagerung von Malus- und Schichten-Zyklus, ausgehend vom Hellbild.

Variationen von φ_A . Weitere vier Schichten geben den Übergang in den Malus-Zyklus, von dem wir ausgingen.

Linear polarisiert nennen wir ein Bild, wenn es eine Polarisationsfolie und eine spezielle Orientierung der Hauptachse A derselben gibt, so dass das Bild vollständig abgedunkelt erscheint. Die zugeordneten Haidinger-Büschel stehen dann senkrecht zueinander, d.h. die Hauptachse der Folie fällt mit der Blaurichtung des Bildes zusammen. Diese wird als Polarisationsrichtung des Bildes bezeichnet. Die Helligkeitseigenschaften eines linear polarisierten Bildes bezüglich eines Analysators sind also gerade diejenigen des Malus-Zyklus' [Dus97].

Zirkular polarisiert nennen wir ein Bild, das aus einem linear polarisierten durch Änderung der Schichtdicke eines Transformators hervorgeht und dessen Helligkeit für beliebige Stellungen eines Analysators erhalten ist.

Die Übergangszustände zwischen linearen und zirkularen Zuständen nennen wir *elliptisch*. In diesem Sinne durchläuft der vertikale Zyklus von Abbildung 8 eine Folge von Polarisationszuständen, die sich in Abhängigkeit von der Folienanzahl folgendermaßen schematisch darstellen lässt:



Zur Unterscheidung der zirkularen Zustände für vier und zwölf Folien bietet sich die Einführung einer Drehsinnes an: Je nach Definition sind dann die elliptischen und zirkularen Zustände der ersten Zyklushälfte *rechtsdrehend*, diejenigen der zweiten Zyklushälfte *linksdrehend*.

Auf die Möglichkeit der geometrischen Zustandsdarstellung mit Hilfe der *Poincaré-Kugel* und die mathematische Beschreibung von Polarisationszuständen und Transformationen durch *Stokes-Parameter* und *Jones-* bzw. *Mueller-Matrizen* sei hier nur hingewiesen [Bro98, Col93, Dus97, Shu62].

Bisher hat es genügt, das Maß der Doppelbrechung von T mit der Schichtenanzahl δ bzw. der Brechzahldifferenz Δ in Zusammenhang zu bringen: $\Delta \sim d(n_a - n_o)$ mit d : gemessene Schichtdicke von T . Die geschilderten Beobachtungen haben nun gezeigt, dass sich Abweichungen vom Malus-Gesetz in Abhängigkeit von der Folienanzahl *wiederholen*, d.h. dass δ einen *Zyklus* parametrisiert, der in unserem Falle (*rotes Hellbild*) aus 16 Transformator-Folien besteht. Um δ durch eine *Zykluszahl* ε zu ersetzen, schreiben wir: $\varepsilon_{\text{rot}} \sim 2\pi n/16$, n : Folienanzahl. Für Beobachtungen, die von einem *grünen Hellbild* ausgehen, schließt sich der Zyklus bereits nach 14 Folien. Es ergibt sich: $\varepsilon_{\text{grün}} \sim 2\pi n/14$. Bezogen auf einen Folientypus heißt das:

Verschiedenfarbige Zyklen sind unterschiedlich lang.

Das jeweilige Verhältnis der für einen Schichten-Zyklus benötigten Schichtdicke zum vollen Zykluswinkel: $d_{\text{Farbe}}/2\pi$ liefert eine charakteristische Referenzlänge l , die sich als Maßstab eignet. Sie ist ferner ein Vielfaches der jeweiligen Wellenlänge λ und damit eine Eigenschaft der verwendeten Leuchte.

Zusammenfassend ergibt sich für die räumlichen Bedingungen, unter denen die Doppelbrechung der Transformator-Folien in der untersuchten Weise wirksam wird, der als Phase geäußerte Ausdruck:

$$\delta = \frac{2\pi d}{l}(n_a - n_o).$$

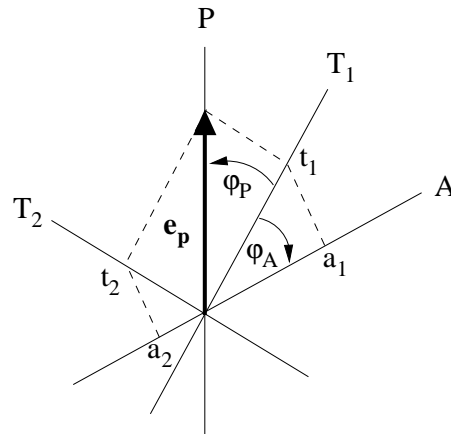
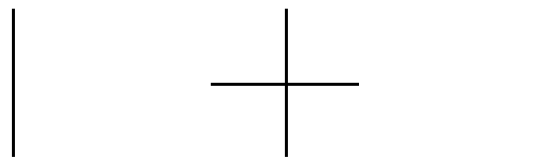


Abbildung 9: Hintereinanderausführung der vier Skalarprodukte.

6 Die Helligkeitsfunktion

In Abschnitt "Polarisation und Skalarprodukt" wurde gezeigt, wie sich mit Hilfe des Skalarproduktes die Bildhelligkeit für das optische Ensemble $[P, A]$ als Funktion des Winkels zwischen den Gelrichtungen des Polarisators und Analysators ausdrücken lässt. Die Anwendung dieses Ansatzes auf das Ensemble $[P, T, A]$ führt im Folgenden auf einen analytischen Ausdruck für die Bildhelligkeit I als Funktion der Winkel φ_P und φ_A zwischen P und T bzw. T und A und der Schichtdicke δ von T : $I(\varphi_P, \varphi_A, \delta)$. Dazu wird P auf T und in einem zweiten Schritt T auf A bezogen:

$$P(\varphi_P) \quad \rightarrow \quad T(\delta) \quad \rightarrow \quad A(\varphi_A)$$



Weil T *doppelbrechend* ist, muss das Skalarprodukt dabei jeweils doppelt ausgeführt werden: \mathbf{e}_p wird auf \mathbf{e}_{t1} und \mathbf{e}_{t2} projiziert und liefert Achsenabschnitte t_1 und t_2 , die dann ihrerseits auf \mathbf{e}_a projiziert werden. Die Gewichtung einer der Achsen t_i mit einem komplexen Phasenfaktor, der die Schichtdicke δ enthält, trägt dem jeweiligen *Maß* der Doppelbrechung Rechnung.¹⁴

Die Ausführung der Skalarprodukte liefert:

¹⁴Welche tiefere Bedeutung es hat, dass in der Berechnung der Helligkeit ein komplexer Phasenfaktor vorkommt, bedarf einer ausführlicheren Erörterung, die hier nicht gegeben werden kann. Zu untersuchen wäre u.a., ob die Äquivalenz der hier gegebenen Ableitung der Helligkeitsfunktion zu einer entsprechenden mit komplexen Jones-Vektoren gezeigt werden kann.

$P(\varphi_P) \rightarrow T$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \cos \varphi_P \\ t_2 &= \sin \varphi_P e^{-i\delta} \end{aligned}$$

$T \rightarrow A(\varphi_A)$:

$$a_1 = \cos \varphi_P \cos \varphi_A \quad (1)$$

$$a_2 = \sin \varphi_P \sin \varphi_A e^{-i\delta} \quad (2)$$

Das Produkt $(a_1 + a_2)(a_1 + a_2)^*$ ist ein Maß für die Helligkeit des Bildes:

$$(a_1 + a_2)(a_1 + a_2)^* =: I \quad (3)$$

Einige Umformungen, die im Anhang aufgeführt sind, liefern mit (1) und (2) für (3):

$$I(\varphi_P, \varphi_A, \delta) = I_0 \cos^2(\varphi_A - \varphi_P) - I_0 \sin 2\varphi_P \sin 2\varphi_A \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (4)$$

Darin ist I_0 die normierte Helligkeit des durch $[A, P]$ für $A \parallel P$ gesehenen Hellbildes. Mit $\varphi_A - \varphi_P = \phi$ ist rasch zu überschauen, dass der in den vorangegangenen Abschnitten untersuchte Helligkeitwandel für das Ensemble $[A, T, P]$ richtig beschrieben wird:

$$I(\varphi_P, \phi, \delta) = I_0 \cos^2 \phi - I_0 \sin 2\varphi_P \sin 2(\phi + \varphi_P) \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (5)$$

Der erste Term der rechten Seite von (5) sei im Folgenden mit (5a), der zweite mit (5b) bezeichnet. Der Einfachheit halber setzen wir δ als Zykluszahl ε an: $\varepsilon = 2\pi n/16$. Für $n = 0$, d.h. ohne Transformator, sowie für ganzzahlige Vielfache von 16 verschwindet (5b): (5) nimmt mit (5a) die bekannte Gestalt des Malus-Gesetzes an. Für halbzahlige Vielfache der Zykluschichtdicke wird (5b) und damit die Abweichung von der Malus-Charakteristik maximal: Das ursprüngliche Hellbild kann zum Dunkelbild und dieses zu jenem werden.

Wie stark bei einer gegebenen Folienanzahl der Transformator wirksam wird, hängt von seiner Hauptachsenlage ab: Für parallele und senkrechte Stellungen zu A oder P , d.h. für $\varphi_P = n \cdot 90^\circ$ bzw. $\varphi_A = n \cdot 90^\circ$, bleibt er unwirksam: (5b) verschwindet, die Malus-Charakteristik ist mit (5a) erhalten. Maximal dagegen wird die Wirksamkeit des Transformators in den Diagonalstellungen mit $\varphi_P = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$ bzw. $\varphi_A = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ)$: Die Verdopplung von φ_P und φ_A in den Sinusfunktionen von (5b) spiegelt die Frequenz des Doppeldreher-Zyklus'.

Danksagung

Diese Arbeit ist Mario Howald-Haller (†) gewidmet. David Auerbach und Ernst-August Müller (†) haben mich mit dem Phänomen der Doppeldrehung bekannt gemacht. Gründliche Kritik des Manuskriptes und zahlreiche weiterführende Anregungen erhielt ich von Friedrich Wilhelm Dustmann, Johannes Kühl und Wilfried Sommer. Den Sinn für die Blickrichtung einer Optik der Bilder habe ich mir an den Arbeiten Manfred von Mackensens, Georg Maiers und Heinz-Christian Ohlendorfs bilden können. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Anhang

A1:

Die in den Abbildungen auf den nächsten Seiten wiedergegebenen Farben sollen annäherungsweise denjenigen entsprechen, die sich für den ersten Zyklus, d.h. für Schichtdicken von 0 bis 16 Folien ergeben.¹⁵ Üblicherweise wird die optische Dicke des Transformators in Einheiten der Wellenlänge λ angegeben. Die Ordnungen der auftretenden Farbfolgen entsprechen dabei den hier mit δ parametrisierten Zyklen [BS93].

A2:

Die Ausführung von (3) liefert

$$\begin{aligned} I &= \left(\cos \varphi_P \cos \varphi_A + \sin \varphi_P \sin \varphi_A e^{-i\delta} \right) \cdot \left(\cos \varphi_P \cos \varphi_A + \sin \varphi_P \sin \varphi_A e^{i\delta} \right) \\ &= \left(\cos^2 \varphi_P \cos^2 \varphi_A + \sin^2 \varphi_P \sin^2 \varphi_A + 2 \cos \varphi_P \cos \varphi_A \sin \varphi_P \sin \varphi_A \cos \delta \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Mit

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

und

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

sowie

$$\cos \alpha = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

erhalten wir für (6)

$$I(\varphi_P, \varphi_A, \delta) = I_0 \cos^2(\varphi_A - \varphi_P) - I_0 \sin 2\varphi_P \sin 2\varphi_A \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

$I_0 = 1$ beschreibt die Intensität des Hellbildes ($A \parallel P$)

Literatur

[Bro98] BROSSEAU, C. *Fundamentals of Polarized Light. A statistical optics approach.* 1998

[BS93] BERGMANN, L. ; SCHÄFER, C. ; NIEDRIG, Heinz (Hrsg.): *Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3: Optik.* Berlin : de Gruyter, 1993

[Col93] COLLETT, E. *Polarized light – fundamentals and applications.* 1993

¹⁵Wir betonen deshalb, dass es sich hier um die Farben des ersten Zyklus handelt, weil sich die Farben nicht *wiederholen*, so wie sich auch die Farben des Regenbogens in seinen Nebenbögen nicht wiederholen. Die Farben führen vielmehr heraus aus der zyklischen Abgeschlossenheit der betrachteten Bildfolgen. Sie führen damit heraus aus der Form von Berechenbarkeit, die in der Helligkeitsfunktion zum Ausdruck kommt. Darin besteht schließlich einer der Hauptgründe, weshalb sie hier nicht eigentlich behandelt wurden.

- [Dus97] DUSTMANN, F. W. *Die optische Polarisation*. Unveröffentlichtes Manuskript. 1997
- [Hai44] HAIDINGER, W. K.: Über das direkte Erkennen des polarisierten Lichts. In: *Poggendorf Annalen* 63 (1844), S. 29–39
- [Hai46] HAIDINGER, W. K.: Beobachtung der Lichtpolarisationsbüschel auf Flächen, welche das Licht in zwei senkrecht aufeinander stehende Richtungen polarisieren. In: *Poggendorf Annalen* 68 (1846), S. 305–319
- [Hec99] HECHT, E.: *Optik*. Bonn : Addison-Wesley, 1999
- [How64] HOWALD-HALLER, M.: Doppelspat und Polarisation. In: *Elemente der Naturwissenschaft* 1 (1964), S. 12–14
- [Jon41] JONES, R. C.: A new calculus for the treatment of optical systems. In: *Journal of the Optical Society* 31 (1941), S. 488–503
- [Mai70] MAIER, G.: Die Elemente als Stufen der Naturbetrachtung. In: *Elemente der Naturwissenschaft* 13 (1970), S. 1–9
- [Prö98] PRÖBSTL, A.: Das Haidinger-Büschel als Urphänomen der Polarisationserscheinungen. In: *Elemente der Naturwissenschaften* 68 (1998), Nr. 2, S. 1–26
- [Shu62] SHURCLIFF, W. A. *Polarized Light*. 1962

$[A, T(\phi, \delta), P]$ für $A \parallel P$:

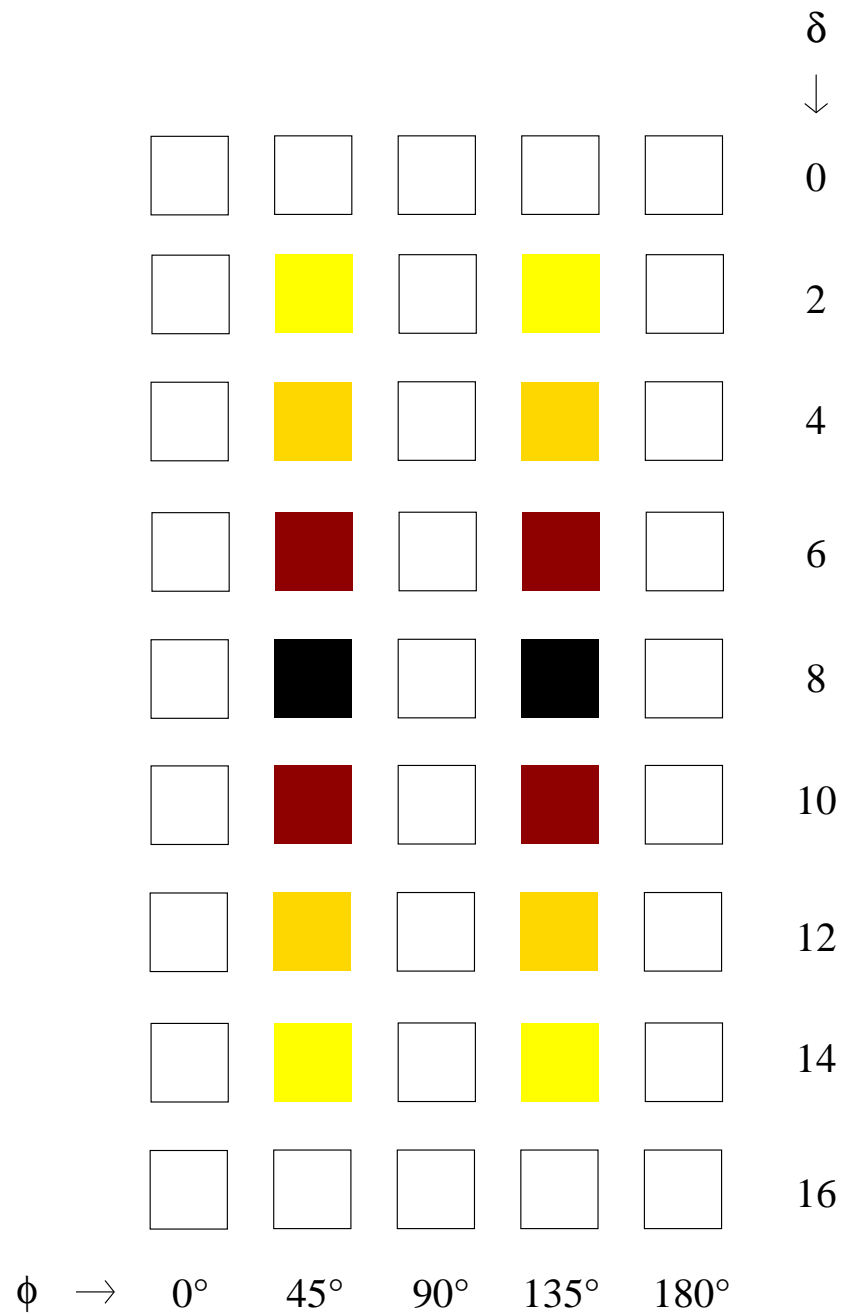


Abbildung 10: Vgl. Abbildung 6 auf Seite 9.

$[A, T(\phi, \delta), P]$ für $A \perp P$:

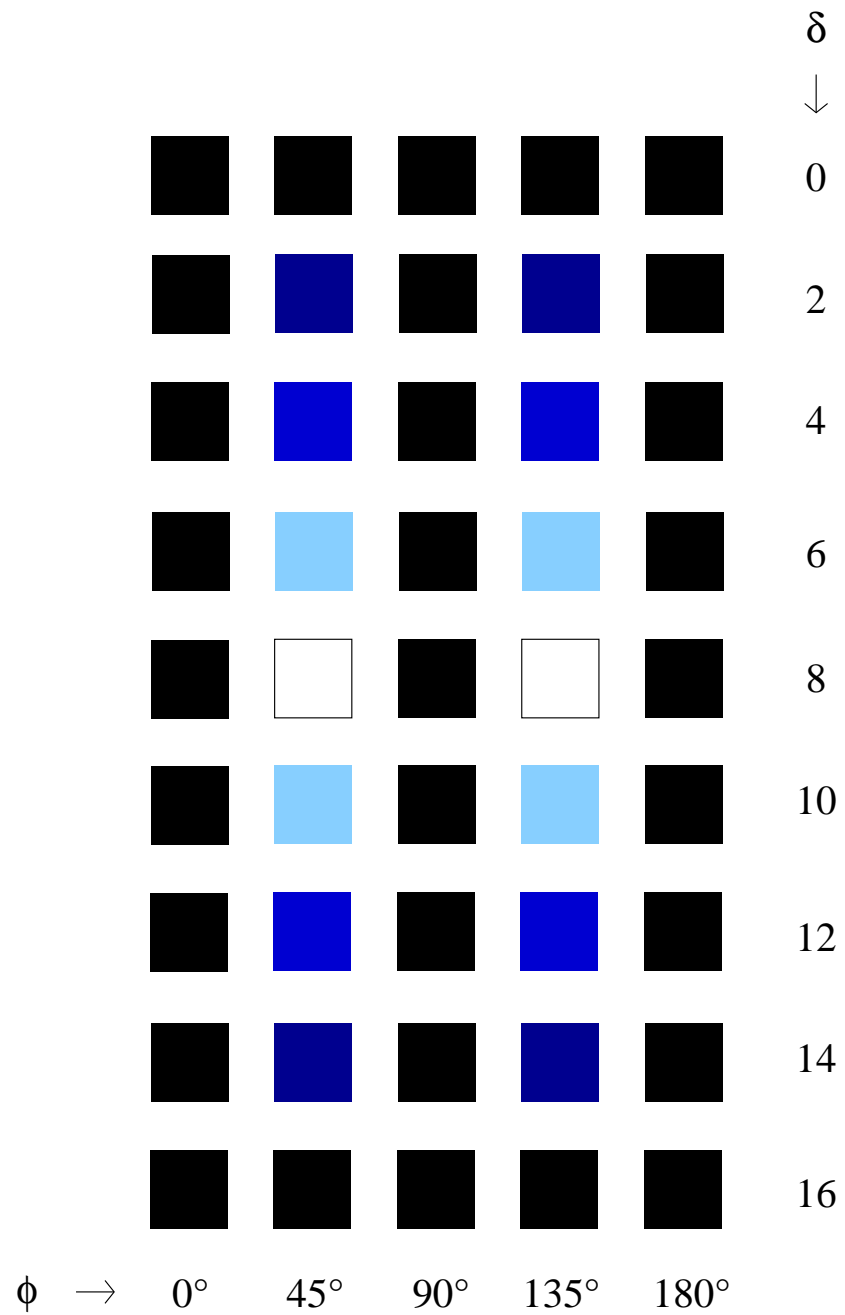


Abbildung 11: Vgl. Abbildung 7 auf Seite 10.

$[A(\varphi_A), T(\delta), P(\varphi_P = (n \cdot 90^\circ + 45^\circ))], \varphi_A = 45^\circ \rightarrow 225^\circ:$

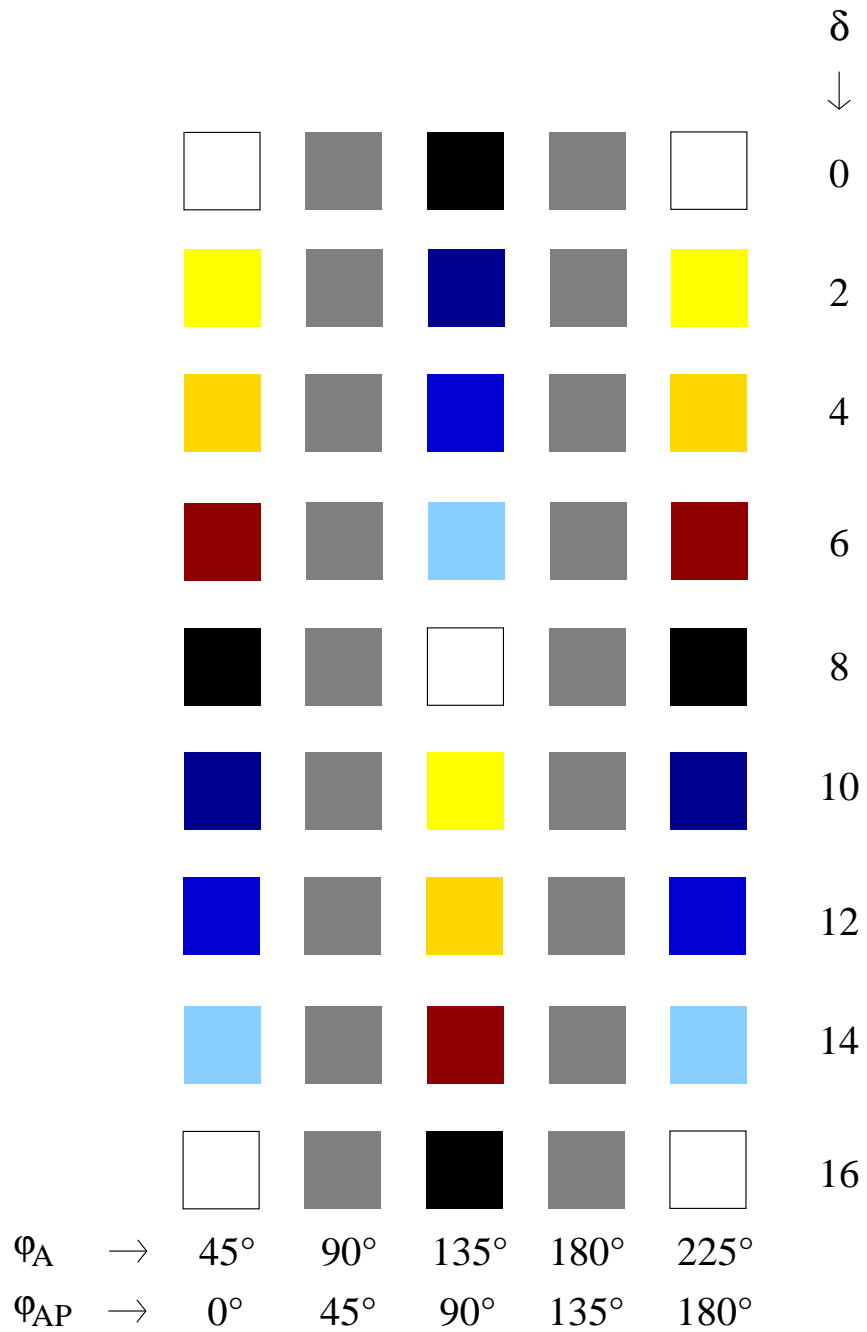


Abbildung 12: Vgl. Abbildung 8 auf Seite 12.