

# Geometrische Optik mit dem Fermat-Prinzip

Roger Erb

(aus: *Physik in der Schule* 30 (1992) 9, S. 291-295.)

---

## 1 Optik in der Sekundarstufe I

Der Optik kommt in der Abfolge der Themen im Physikunterricht ein besonderer Stellenwert zu. Da sie meist am Anfang steht, treten die Vorstellungen und Interessen der Schüler in einen ersten Kontakt mit der Physik. Wie Erfahrungen von Physiklehrern zeigen und Untersuchungen [LHG85] belegen, werden die Schüler dabei häufig enttäuscht. Ein Grund dafür ist sicher, dass die Anbindung an die außerschulische Welt nur beiläufig stattfindet. Auch Spaß am Verstehen der Inhalte zu bekommen ist schwierig, besonders in der geometrischen Optik, wo innerhalb des Themas Gesetze und Regeln scheinbar unabhängig nebeneinander stehen. Wenn zudem das Gelernte im weiteren Schulleben, selbst in der Oberstufenoptik, keine Rolle spielt, kann ein Schüler kaum motiviert werden, sich intensiv mit der Thematik zu befassen.

Gerade aber weil die Mittelstufenoptik ein in sich begrenztes Gebiet darstellt, bietet sie auch die Möglichkeit, andere Unterrichtsansätze zu versuchen, ohne in Konflikt mit dem Lehrplangebäude zu kommen. Der Vorschlag "Vom Sehen zu Optik" versucht deshalb, die ganze Mittelstufenoptik aus lebensnahen Phänomenen zu entwickeln; der Teil, der sich mit der geometrischen Optik befasst, ist im folgenden ausgeführt. Er kann auch in den üblichen Optikunterricht integriert werden.

## 2 Einbindung der geometrischen Optik in "Vom Sehen zur Optik"

In Kassel wird an einer Konzeption "Vom Sehen zur Optik" gearbeitet, die versucht, möglichst viele der Inhalte auf Phänomene zu gründen [Sch]. Dabei sollen Sichtweisen, Methoden und Gesetze weitgehend Zusammenhänge erkennen lassen, um ein tiefes Verständnis zu ermöglichen. Auf der ersten Stufe wird, ausgehend von grundlegenden Erfahrungen mit Licht und Schatten, eine Optik bis hin zur Behandlung von Linsen entwickelt, für die nicht das Modell des Lichtstrahls benötigt wird. Dabei spielt der Beobachter eine besondere Rolle, und es wird zunächst ein vermeintlich subjektives Ergebnis erzeugt, das aber leicht in allgemeine Erkenntnisse mündet, ohne das Erlebnis der eigenen Erfahrung zu verwischen.

Die geometrische Optik entfernt sich in ihrer Idee ein Stück weit von diesem Ansatz, da auf eine eher abstrakte Weise eine Eigenschaft des Lichtes oder – mehr technisch – der verwendeten

Bauteile beschrieben wird. Darin liegt auch eine wesentliche Motivation: Das sicher nicht unkritisch einzuführende Modell des Lichtstrahls erlaubt Konstruktionen, die zu nachprüfbaren Ergebnissen führen und so einen Aspekt der Arbeitsweise der Physik verdeutlichen.

Aber auch in der geometrischen Optik kann, wie mit unserem Vorschlag deutlich gemacht werden soll, von dem direkt Erfahrbaren ausgegangen werden. Die Beziehung Beobachter – Gegenstand bekommt dabei eine besondere Bedeutung. Häufig wird im Sinn eines Spiralcurriculums an den vorhergehenden Teil angeknüpft; die Suche nach einem allgemeinen Erklärungsprinzip gewinnt aber die Oberhand. Das Fermat-Prinzip, dessen Verwendung im Physikunterricht u.a. auch in [Dru73] und [Ras83] vorgeschlagen wurde, ist dieses allgemeine Erklärungsprinzip, aus dem als Grundaussage weitere Gesetze abgeleitet werden können. Eine Anregung, mit dem gleichen Gedanken die Linsenoptik einzuleiten, wurde von uns 1991 veröffentlicht [ES91]. Im weiteren Unterrichtsverlauf können wie bisher Konstruktionen durchgeführt werden, wobei jetzt aber das Modell des Lichtstrahls – und damit die Funktion der ausgezeichneten Strahlen – als Lichtweg eine neue Bedeutung erlangt hat.

## 2.1 Thematische Abfolge der geometrischen Optik

- Geradlinige Ausbreitung  
**Fermat-Prinzip**
- Reflexion  
Bildentstehung
  - Konstruktion von Bildern am Spiegel
- optische Hebung  
Messung der Lichtgeschwindigkeit  
Brechung
  - Konstruktion von Bildern an Linsen
- (Vorbereitung durch "Vom Sehen zur Optik")

## 3 Das Fermat-Prinzip

Das Prinzip des kürzesten Lichtweges war schon seit der Antike bekannt [Hun78]. Fermat erweiterte es auf die Brechung und fand damit einen wichtigen Baustein für die Entwicklung der Variationsrechnung. Das Fermat-Prinzip in seiner allgemeinen Form ist ein Variationsprinzip und macht eine Aussage über den Lichtweg zwischen zwei Punkten. Es beurteilt damit das Problem der Lichtausbreitung final (Betrachtung des Gesamtzusammenhanges) und nicht

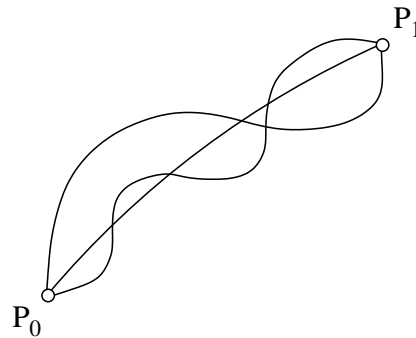


Abbildung 1: Verschiedene Wege im optisch inhomogenen Medium

kausal (z.B. welcher Reflexionswinkel sich für das unter einem bestimmten Winkel auf einen Spiegel fallende Licht ergibt).

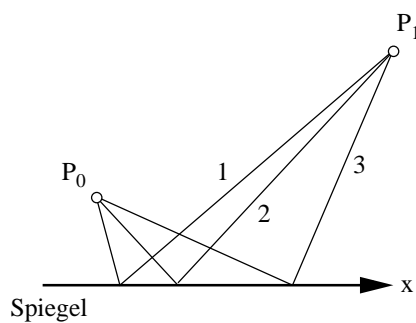


Abbildung 2: Verschiedene Wege für die Reflexion am ebenen Spiegel

Die Länge *OWL* (optische Weglänge) des Lichtweges hat im Vergleich zu möglichen Nachbarwegen einen Extremwert, in den meisten Fällen ein Minimum. Im homogenen Medium ist der Lichtweg folglich eine Gerade. Bei Brechung wird der Lichtweg mit der Brechzahl gewichtet:

$$OWL = \sum_i n_i l_i = \text{Extr.} \quad \text{oder}$$

$$\delta \sum_i n_i l_i = 0 \quad (\text{die Variation verschwindet})$$

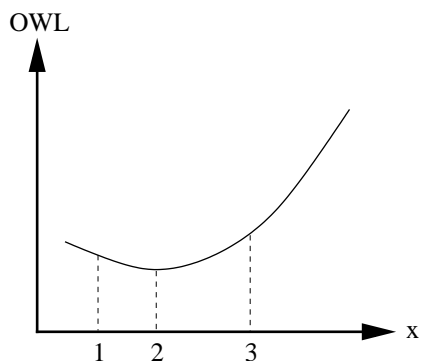
Bei sich stetig änderndem Brechungsindex gilt

$$\int_{P_0}^{P_1} n dl = \text{Extr.}$$

Da  $dl = \frac{c_0}{n} dt$ , kann auch  $\int_{P_0}^{P_1} n dt = \text{Extr.}$ , das Prinzip der kürzesten Laufzeit, formuliert werden (Abbildungen 1 bis 3).

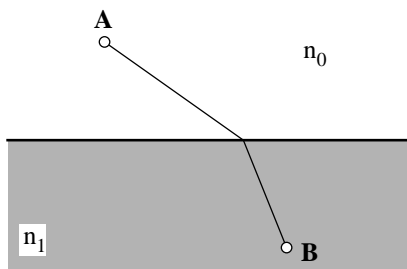
Formal ergibt sich eine Analogie zum Hamilton Prinzip der kleinsten Wirkung, physikalisch zeigt sich die Nähe zur Bedingung für die Bildentstehung: Sind zwei oder mehr gleichlange Lichtwege zwischen zwei Punkten möglich, ist der eine ein Bild des anderen [Hof80].

Hierbei werden aber reale Lichtwege in Verbindung miteinander gebracht; im Gegensatz dazu beim Fermat-Prinzip gedachte benachbarte Wege. Infolgedessen kann die Bedingung für die Bildentstehung nicht aus dem Fermat-Prinzip abgeleitet werden. Ihre Begründung finden beide außerhalb der geometrischen Optik mit der Betrachtung von Phasenbeziehungen ver-



**Abbildung 3:** Optische Weglänge für verschiedene Lichtwege aus Abbildung 2. Der wirkliche Lichtweg ist extremal. Seine Variation verschwindet; eng benachbarte Lichtwege sind etwa gleichlang.

schiedener Lichtwege. Die gesamte geometrische Optik kann auf der Basis des Fermat-Prinzips entstehen. Die schnellste Verbindung zwischen zwei Punkten ist im homogenen Medium eine Gerade. Es ist das Grundwesen des Lichtes in der geometrischen Optik, dass es sich geradlinig ausbreitet. Diese Erfahrung ist so tief in uns verankert, dass man eher die Geradlinigkeit über die Ausbreitung des Lichtes definieren kann.



**Abbildung 4:** Lichtweg an der Trennfläche

Land zu einem Punkt  $B$  im Wasser gelangen möchte, den Weg so wählen, dass er im Vergleich zum direkten Weg ein längeres Stück auf dem Land wegen der dort höheren Fortbewegungsgeschwindigkeit zurücklegen könnte.

Der Fall der Brechung an einer Grenzfläche ist in Abbildung 4 skizziert. Die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  ist nun keine Gerade. An der Grenzfläche entsteht ein Knick; die Teile müssen wie im allgemeinen Fall mit der Brechzahl gewichtet werden. Nun muss deutlich vom optisch kürzesten oder schnellsten Lichtweg gesprochen werden, denn die unterschiedliche Lichtgeschwindigkeit in beiden Medien spielt die entscheidende Rolle. Ähnlich würde jemand, der möglichst schnell von einem Punkt  $A$  auf dem

Mathematisch reduziert sich im Fall der Reflexion und der Brechung an einer Grenzfläche das Variationsproblem wieder zu einer Extremwertaufgabe, die mit Hilfe geometrischer Überlegungen oder mit einem Modellexperiment gelöst werden kann. Analytisch gelingt dies nach der Einführung der Differentialrechnung erst in der Sekundarstufe II.

## 4 Durchführung im Unterricht

### 4.1 Geradlinige Ausbreitung

Wir greifen auf schon im ersten Teil von "Vom Sehen zur Optik" gemachte Erfahrungen mit Schattengrenzen zurück. (Auf solche Erfahrungen wird noch häufiger zurückgegriffen. Hier werden dann nur kurz die betreffenden Bezüge dargestellt.) Es kommt darauf an, deutlich zu machen, dass der Begriff "Geradlinigkeit" und die Ausbreitung des Lichtes eng miteinander verbunden sind. Blickt man direkt zu einer Kerze, kann man den Blickweg und damit auch den Lichtweg durch Zwischenstellen von Blenden festhalten. Ein durch diese Blenden gelegter Faden verdeutlicht, dass das Licht den kürzesten Weg nimmt, denn auch ohne Blenden zeigt der gespannte Faden zwischen Kerze und Beobachter den gleichen Weg an. Es wird dadurch die erste Formulierung der Fermat-Prinzips plausibel:

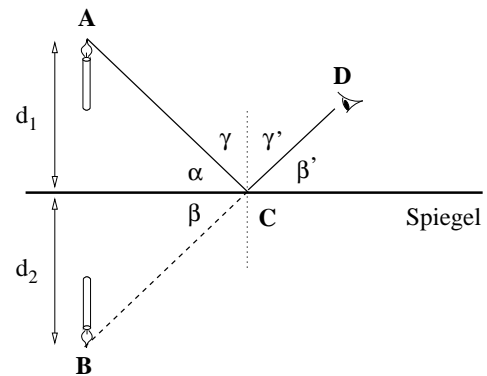
Das Licht breitet sich längs des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten aus.

### 4.2 Reflexion

Das so gefundene Prinzip soll nun den Stellenwert eines Gesetzes bekommen und anhand weiterer Phänomene überprüft werden. Wir untersuchen dazu das Bild einer Kerze, welches der Betrachter im Spiegel sieht. Den Überlegungen des ersten Teils folgend kann man weite Teile des Spiegels abdecken und so den Bereich finden, in dem der Betrachter die Kerze sieht. Es ergibt sich der in Abbildung 5 dargestellte Zusammenhang. Der Lichtweg über den Spiegel ist zwar länger als der direkte zur Kerze, aber er ist doch zumindest der kürzere über den Spiegel. Denn der Weg  $\overline{BCD}$  ist eine Gerade, also nicht mehr zu verkürzen, und da  $d_1 = d_2$ , ist auch  $\overline{ACD} = \overline{BCD}$ .

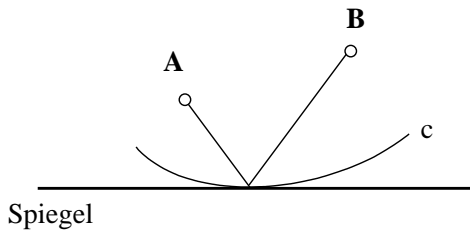
So ergibt sich aus dem Fermat-Prinzip und geometrischen Überlegungen auch das Reflexionsgesetz, dass  $\beta = \beta'$  und  $\alpha = \beta$  somit  $\gamma = \gamma'$ . Außerdem wird deutlich, dass  $A$ ,  $C$  und  $D$  in einer Ebene liegen müssen. In einem Arbeitsblatt (Abbildung 8 auf Seite 10) kann durch Ausmessen der tatsächliche Lichtweg mit möglichen anderen verglichen werden.

Experimentell prüfen wir das durch eine lange, zwischen zwei Pinnadeln an einer Korkwand aufgehängten Kette nach. Diese Kette wird jetzt anstelle des vorher benutzten Fadens gespannt, damit Wegeinheiten anhand der Perlen ausgezählt werden können. Sie veranschaulicht den Lichtweg zwischen Kerze, Beobachter und Spiegelfläche, dargestellt durch eine aufgeklebte Linie, die sie in einem Punkt berührt. Verschiebt man nun diesen Spiegelpunkt  $x$ , stellt



**Abbildung 5:** Blickweg  $\overline{BCD}$  und Lichtweg  $\overline{ACD}$  bei der Reflexion

man fest, dass die zwischen  $A$ ,  $B$  und  $x$  gespannte Kette unterschiedlich lang sein muss. Der Punkt  $x$ , bei dessen Benutzung die Kette am kürzesten ist, entspricht dem Spiegelpunkt  $C$  in Abbildung 5, die Länge der "richtigen" Länge  $\overline{ACD}$ .



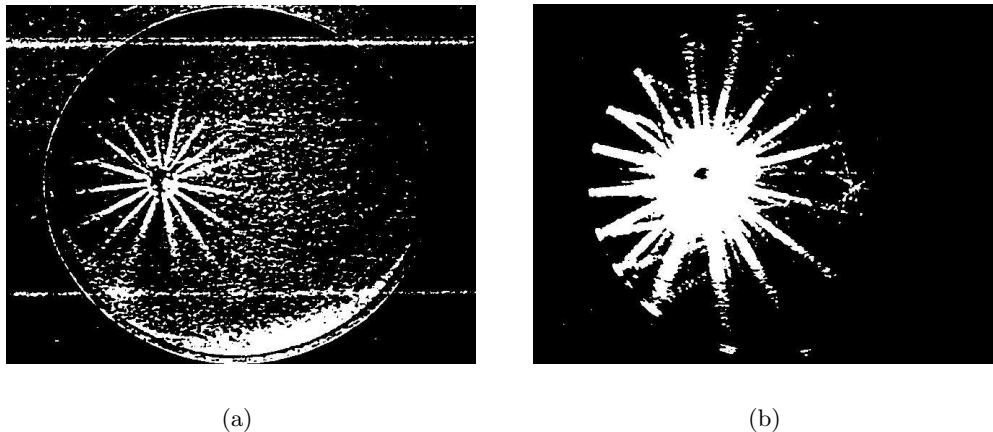
**Abbildung 6:** Entwicklung des Ellipsenspiegels

Hält man nun die Kettenlänge fest und bewegt den Knickpunkt der Kette nach links und rechts, so hebt sich dieser von der Spiegelfläche ab und beschreibt die in Abbildung 6 auf der vorherigen Seite mit  $c$  bezeichnete Kurve, einen Abschnitt einer Ellipse, deren Brennpunkte  $A$  und  $B$  sind. Es gibt dann mehrere gleichlange Lichtwege von  $A$  über  $c$  nach  $B$ . Am ebenen Spiegel findet man außer dem Schein der Kerze auch noch einen Schein der gespiegelten Kerze. Jeder Betrachter, der sich innerhalb dieses Scheins befindet, sieht die Spiegelkerze. Biegt man nun den Spiegel, so verkleinert sich der Schein der Spiegelkerze und wird dabei heller. Man kann eine helle, schmale Lichtlinie auf die Wand werfen oder aber in das Auge eines Betrachters. Der so leicht Geblendete sieht nun im Spiegel je nach Biegung eine helle Kerze, viele Kerzen oder den Spiegel von einem hellen Schein erfüllt. Bei ihm kommt also mehr Licht an als zuvor, und zwar über verschiedene Punkte des Spiegels, also verschiedene Lichtwege. (Die Frage, ob es zwingend ist, dass ein Spiegel genauso geformt ist, um Licht an einem Punkt zu sammeln, lässt sich mit dieser Erkenntnis nicht beantworten. Auch mit einer Vielzahl von einzelnen Planspiegeln oder einer Fresnellinse lässt sich Licht sammeln, ohne dass die Lichtwege gleichlang sind. Die Frage nach der Form deines Spiegels ist eher kausal und entspricht so dem Reflexionsgesetz und nicht Bedingungen, die dem Fermat-Prinzip verwandt sind.)

Die Lichtlinie zeigt an, dass das Licht lediglich in einer Ebene gesammelt wird, weil der Spiegel sich immer nur zu einem Zylinder biegen lässt. Könnte man den Spiegel zugleich auch in der anderen Richtung biegen, würde aus der Linie ein Lichtpunkt. Wir ersetzen die fehlende Biegung durch eine Schlitzblende aus Papier vor dem Spiegel, die mitgebogen wird. Man erhält tatsächlich nicht einen der Breite der Schlitzblende entsprechenden Lichtpunkt, sondern ein relativ scharfes Bild der Kerzenflamme. Die Blende hat die fehlende Biegung wie eine Lochkamera für nur eine Dimension ersetzt. Ermöglicht man also mehrere gleichlange Lichtwege zwischen zwei Punkten, so ergibt sich nicht nur ein hellerer Punkt, sondern es entsteht ein Bild.

Gibt es mehrere gleichlange Lichtwege zwischen zwei Punkten, so entsteht an einem ein auffangbares Bild des anderen.

Um das in alle Richtungen der Ebene ausgesendete Licht zu nutzen, kann man Spiegelfolie längs einer Ellipse biegen. Dass dadurch gleichlange Wege erzeugt werden, zeigt man geometrisch einfach mit der Fadenkonstruktion ("Gärtnerkonstruktion"). Das Ergebnis mit einer in



**Abbildung 7:** Abbildungen im elliptischen Spiegel

einem Brennpunkt stehenden Glühlampe mit einem kleinen, runden, geschlitzten Schirm zeigt Abbildung 7 auf der nächsten Seite. Dreidimensionale elliptische Spiegel bilden genau einen Punkt in einen anderen ab, parabolisch einen unendlich weit entfernten. In jedem Punkt an der Spiegelfläche gilt für die Lichtwege das Reflexionsgesetz bezüglich der Tangente an der Kurve in diesem Punkt. Im schulüblichen, weiteren Verlauf können jetzt Konstruktionsaufgaben am häufig verwendeten Kugelspiegel durchgeführt werden, für den die gezeichneten "Strahlen" besondere, einfach zu konstruierende Lichtwege sind.

### 4.3 Brechung

Experimente mit Brechung an einer Grenzfläche zeigen, dass der Lichtweg einen Knick bekommt. Schon im ersten Teil haben die Schüler Erfahrungen mit unterschiedlichen Medien gemacht, dabei wurde mit dem Phänomen der optischen Hebung eine Brechzahl für Wasser, Glas und Luft eingeführt. Das Ziel ist jetzt, die durch das Brechungsphänomen aufgeworfene Problematik für die Formulierung des Fermat-Prinzips zu nutzen. Dazu muss man ernst machen mit dem Ausbreitungsgedanken: Kürzester Weg muss nicht unbedingt geometrisch kürzest bedeuten, wenn man an das Beispiel mit der Fortbewegungsgeschwindigkeit eines Menschen an Land und im Wasser denkt. Den richtigen Lichtweg finden die Schüler, wenn sie die Stelle der Wasseroberfläche suchen, durch die man zu einem Gegenstand im Wasser blickt. Mit diesem Punkt, dem Beobachtungsort und der von der Seite zu sehenden oder zu tastenden tatsächlichen Lage des Gegenstandes ist der Lichtweg festgelegt. Ein auf die Wasseroberfläche gelenktes Lichtbündel bestätigt das Ergebnis. Nun lässt sich auch ohne Messung aus Überlegungen schließen, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser oder Glas niedriger als in Luft ist. Würde in Abbildung 4 auf Seite 4 das Licht sich längs einer Geraden von  $A$  nach  $B$  ausbreiten, nähme es den geometrisch kürzesten Weg. Bei gleicher Ausbreitungsgeschwin-

digkeit in beiden Medien wäre dies auch der schnellste Weg. Im einfachsten Fall entsprechen also diese beiden Formulierungen der Extremalbedingung. Die Entsprechung wird für den allgemeinen Fall übernommen, und so soll eine Verlängerung des Weges in Luft verbunden mit einer Verkürzung in Wasser trotz des geometrisch längeren Weges eine Verkürzung der Gesamtlaufzeit bewirken. Deshalb muss die Lichtgeschwindigkeit in Wasser niedriger sein als in Luft, und das Fermat-Prinzip wird erweitert.

Breitet sich das Licht durch verschiedene Medien aus, muss seine Geschwindigkeit berücksichtigt werden. Das Licht breitet sich längs des Weges mit der kürzesten Laufzeit aus.

An der Korkwand lässt sich das Ergebnis wieder durch einfaches Abzählen von Kettengliedern zeigen. Die Glieder müssen jetzt nur entsprechend dem Geschwindigkeitsverhältnis verschiedene Abstände haben. Das wird dadurch erreicht, dass die Kette aus zwei Hälften besteht, wobei für die Brechung Luft – Glas in dem zur Luft gehörenden Teil der Kette jedes dritte Kettenglied eine andere Farbe und in dem zum Glas gehörenden Teil jedes zweite Kettenglied eine andere Farbe hat. Die Abschnitte stellen also den in einer bestimmten Zeiteinheit zurückgelegten Weg dar. Die Kette wird gemäß Abbildung 4 zwischen den Pinnadeln  $A$  und  $B$  gespannt, wobei die Mitte der Kette (die Grenze zwischen den verschiedenen Wegabschnitten) auf der Trennfläche zwischen den Medien, symbolisiert durch die gerade Linie, gehalten wird. Nun werden die markierten Glieder für verschiedene Schnittpunkte  $x$  mit der Trennlinie gezählt, dabei muss die Kette nach  $A$  und  $B$  jeweils neu gespannt werden. Der Weg mit den wenigsten markierten Kettengliedern entspricht dem tatsächlichen. Die Schüler können das selbst auf einem Arbeitsblatt unter Verwendung entsprechend veränderter Maßstäbe für das dichtere Medium nachvollziehen. Die Verwendung eines Funktionsmodells, wie es Mach [Mac21] vorgeschlagen hat, ist wegen der eher erschwerenden Übertragung auf die Mechanik nicht vorgesehen.

Der Weg des Lichtes beim Übergang von einem Medium zu einem anderen, aus dem das Brechungsgesetz abgelesen werden kann, ist somit auf das Fermat-Prinzip zurückgeführt.

## 5 Resümee

In der vorgestellten Konzeption wurde angestrebt, Aussagen über das Wesen des Lichtes, also die Ausbreitung längs des schnellsten Weges und die Lichtgeschwindigkeit, zum Unterrichtsinhalt zu machen. Diese Aussagen selbst müssen als natürliche Eigenschaften des Lichtes angesehen werden, sie können auf dieser Ebene nicht weiter hinterfragt werden. Das ist aber kein Verlust, denn immer wird auf einem bestimmten Niveau etwas nicht weiter hinterfragbar sein. Zur Zeit wird an einem Unterrichtsvorschlag gearbeitet, der an diese Inhalte und auch Methoden (Betrachtung von Lichtwegen zwischen Punkten) in der Sekundarstufe II anknüpft. Dem liegt eine Idee Feynmans [Fey88] zugrunde, deren Eignung für die Schule auch



von Strnad [Str87] und Engelhard [Eng90] diskutiert wurde. Auf dieser Ebene behält das in der Mittelstufe Erarbeitete seine Gültigkeit, und es wird mit einer moderneren Vorstellung von Licht nachträglich plausibel gemacht; natürlich bleiben auch dabei Fragen offen. Während sonst jedoch in der Optik der Eindruck erweckt wird, dass die Modelle wie Strahlen, Welle und Teilchen, auf die sicher nicht vollständig verzichtet werden kann, je nach Fragestellung gewechselt werden, hat der hier vorgestellte Teil, wie auch das Gesamtkonzept, den Anspruch, eine in sich schlüssige Vorstellung von der Optik zu ermöglichen.

## Literatur

- [Dru73] DRUXES, H. *Curriculum für den physikalischen Sachunterricht. – Optik Curriculum unter Verwendung des Fermatschen Prinzips.* 1973
- [Eng90] ENGELHARDT, P.: Quantenphysik in der Schule – undurchsichtige Wege zu unklaren Zielen? In: KUHN, W. (Hrsg.): *Zur Didaktik der Physik und Chemie. – Vorträge auf der GDGP-Tagung in Kassel 1989*, Alsbach, 1990, S. 296 ff.
- [ES91] ERB, R. ; SCHÖN, L.: Die Schusterkugel. In: WIEBEL, K.H. (Hrsg.): *Zur Didaktik der Physik und Chemie – Vorträge auf der GDGP-Tagung in Weingarten 1990* Bd. 10. Alsbach : Leuchtturm, 1991, S. 291–293
- [Fey88] FEYNMAN, R. P.: *QED – Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie.* München : Piper, 1988
- [Hof80] HOFMANN, Ch. *Die optische Abbildung.* 1980
- [Hun78] HUND, F. *Geschichte der physikalischen Begriffe I.* 1978
- [LHG85] LEHRKE, M. ; HOFFMANN, L. ; GARDNER, P.L. *Interest in Science an Technology Education, 12th IPN Symposium 1985.* 1985
- [Mac21] MACH, E. *Die Prinzipien der physikalischen Begriffe I.* 1921
- [Ras83] RASCHER, R.: "Moderne Physik" am Beispiel der geometrischen Optik in der Stufe 5/6. In: SCHARMANN, A. (Hrsg.) ; HOFSTAETTER, A. (Hrsg.) ; KUHN, W. (Hrsg.): *Vorträge auf der Frühjahrstagung der DPG FA Didaktik.* Gießen, 1983, S. 244–249
- [Sch] SCHÖN, L. *Vom Sehen zur Optik – Anmerkungen zu einer didaktischen Konzeption*
- [Str87] STRNAD, J.: Der Feynmansche Weg in die Quantenphysik. In: KUHN, W. (Hrsg.): *Didaktik der Physik, Vorträge, Tagungsband der Tagung.* Berlin, 1987, S. 115–121

**Arbeitsblatt:****Geometrische Optik mit dem Fermat Prinzip**

(Wegen der geringen Größe der Abbildungen dürfen die untersuchten Wege nicht zu nahe beieinander liegen.)

**Reflexion****A**  
⊗**B**  
⊗\_\_\_\_\_  
Spiegel**Brechung****A**  
⊗

Luft

Glas

**B**  
⊗

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Abbildung 8: Arbeitsblatt