

## Von der Spiegelwelt zu den Planetenbahnen

Pascal Guderian, Lutz-Helmut Schön

Humboldt-Universität zu Berlin, Newtonstraße 15, 12489 Berlin

### Kurzfassung

Inhalt dieser Ausarbeitung ist eine Gegenüberstellung der optischen Abbildung mittels eines gekrümmten Spiegels und der Beschreibung von Planetenbahnen, denen als verbindendes Element ein geometrisches Prinzip unterliegt. Die optische Abbildung nutzt Formalismen aus der Fermatoptik, während die Untersuchung der Planetenbewegungen Überlegungen von Kepler, Newton und Feynman übernimmt. Beide Prinzipien führen zu gleichen geometrischen Formen, insbesondere der Ellipse als übergeordnetem abstrakten Konzept.

### 1. Einleitung

Die *Spiegelwelt* ist ein zentraler Bestandteil der von Schön et al. phänomenologischen Anfangsoptik (siehe [2–5]). Sie führt eine Betrachtungsweise ein, die im kumulativen Sinne den Erkenntnisprozess unterstützt und fördert. Aufbauend darauf folgt in unserem Curriculum die *Fermatoptik*, die Beobachtungen aus der Anfangsoptik mithilfe des Lichtwegkonzeptes zunehmend abstrahiert und verallgemeinert. An dieser Stelle wird gezeigt, dass solche Abstrahierungen geometrische Gesetzmäßigkeiten als Grundlage haben können, die auch in anderen Bereichen der Physik zu Tage treten, wie z.B. der Mechanik im Rahmen der Planetenbewegungen. Es wird auf Ideen aus ([1]) zurückgegriffen, die ihren Ursprung bei Newton und Feynman haben.

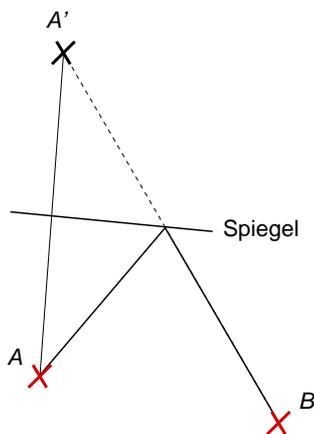


Abbildung 1: Ein Spiegel erzeugt das Spiegelbild  $A'$  von  $A$ . Die optische Weglänge von  $B$  zu  $A$  bzw.  $A'$  ist gleich.

### 2. Von der Spiegelwelt zur Ellipse

Wir betrachten zunächst zwei willkürliche Punkte  $A$  und  $B$ . Ein Spiegel wird in den Raum gestellt. Das Spiegelbild von  $A$  befindet sich im Punkt  $A'$ , im selben Abstand zum Spiegel, nur senkrecht gegenüber (Abbildung 1).

Wir wollen fordern, dass der Punkt  $B$  den reellen Bildpunkt von  $A$  darstellen soll und die Form eines Spie-

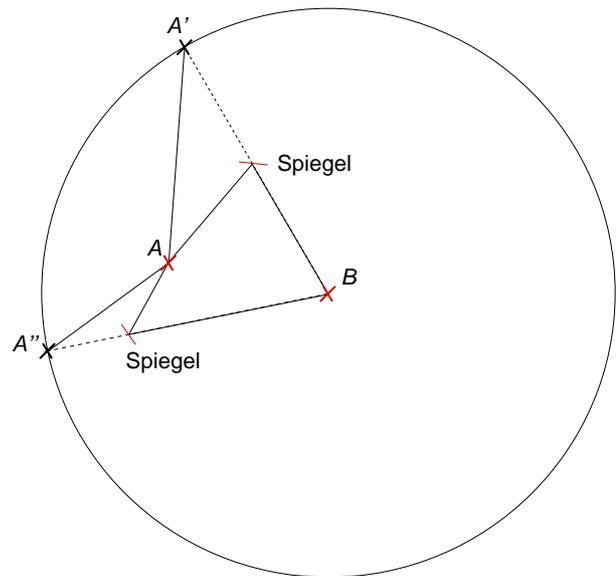


Abbildung 2: Ein weiterer Punkt auf dem Kreis um  $B$  erfordert einen anderen Spiegel.

gels suchen, der diese Abbildung veranlasst. Die Fermatoptik ergründet, dass eine echte Bildentstehung nur dann möglich ist, wenn alle Lichtwege, die Beitrag zur Abbildung liefern, die exakt gleiche optische Weglänge besitzen. So kann eine Sammellinse nur deswegen ein Bild erzeugen, weil geometrische Lichtwegunterschiede durch den Glaskörper der konvex geformten Linse und die damit verbundenen Laufzeitunterschiede exakt kompensiert werden.

Offenkundig ist die Weglänge von  $B$  zu  $A$  identisch mit der von  $B$  zu  $A'$ . Nun muss gemäß der Fermatbedingung jeder Lichtweg ausgehend von  $A$  die selbe optische Weglänge zu  $B$  besitzen. Licht breitet sich in alle Richtungen gleich aus, ein Kreis um  $B$  (bei dreidimensionaler Betrachtung eine Kugel) mit dem Radius  $\overline{BA'}$  zeigt demzufolge alle Punkte an, die exakt diese optische Weglänge haben. In Abbildung 2 wird  $A''$  herausgegriffen; der Spiegel, der  $A''$  erzeugt, muss die Mittelsenkrechte zwischen  $A$  und  $A''$  bilden. Wieder entspricht die optische Weglänge  $\overline{BA}$  der Länge  $\overline{BA''}$ .

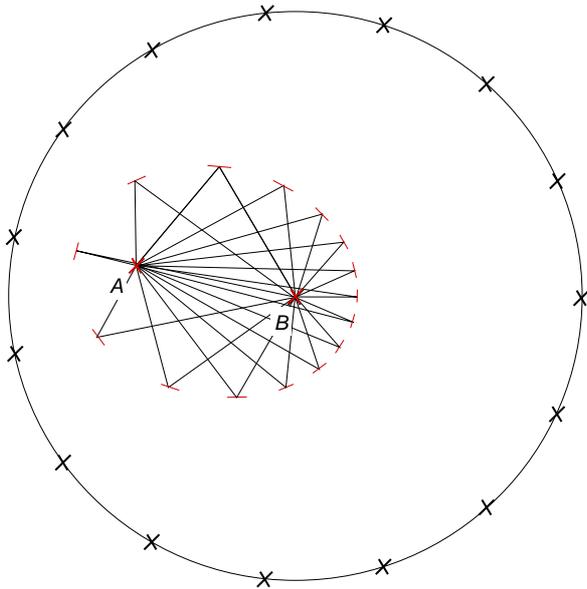


Abbildung 3: Führt man die im Text beschriebene Konstruktion für ausgewählte Punkte auf dem Kreis durch, so erhält man bereits die Form einer Ellipse.

Der endgültige Spiegel sollte eine solche Form haben, die alle auf diese Weise gewonnenen Spiegel als Tangenten beinhaltet. Eine repräsentative Anzahl weiterer Punkte und analoge Konstruktion lässt die Form des endgültigen Spiegel bereits ahnen (Abbildung 3): Der mit allen auf dem Kreis liegenden Punkten konstruierte Spiegel ist eine Ellipse.

Die Konstruktion lässt mehrere Aspekte zu Tage treten, die in Abbildung 4 grafisch zusammengefasst sind und an die wir uns im folgenden Abschnitt später erinnern wollen:

- Die Forderung identischer optischer Weglängen führt zu einem Kreis.
- Jeder einzelne Spiegel ist Mittelsenkrechte zur Verbindung von Punkt zu Spiegelweltpunkt und die Tangente an der entstehenden Ellipsenkurve.

Übrigens: Wie in der Abbildung 4 zu sehen ist, folgt das bekannte Reflexionsgesetz unmittelbar.

### 3. Von den Planetenbahnen zur Ellipse

Kepler hat seinerzeit versucht, die Planetenbewegungen zu beschreiben und Gesetzmäßigkeiten zu finden. Dabei griff er auf reine Beobachtungen zurück. Seine Erkenntnisse lassen sich in drei berühmten Gesetzen zusammenfassen:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen.
2. Die Verbindung zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Zwischen der Umlaufdauer  $T$  und der großen Halbachse  $a$  der Ellipse gilt die Beziehung:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

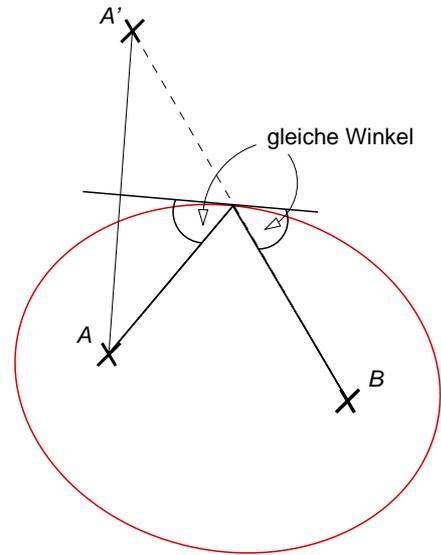


Abbildung 4: Nur eine Ellipse bildet zwei Punkte ineinander ab.

Diese drei Gesetze waren für Newton Ausgangspunkt seiner Überlegungen zur Gravitation, die wiederum zu seinen noch berühmteren Axiomen führten. Er bewies das 1. Keplersche Gesetz und fand im Zuge dessen einen formalen Zusammenhang zwischen der Kraft  $F$  und dem Abstand vom Planeten zum Gravitationszentrum  $R$ . Wir wollen dem Gedankengang Newtons folgen und versuchen, alleine über das 2. und 3. Keplersche Gesetz Voraussagen über die Bahnform zu treffen.

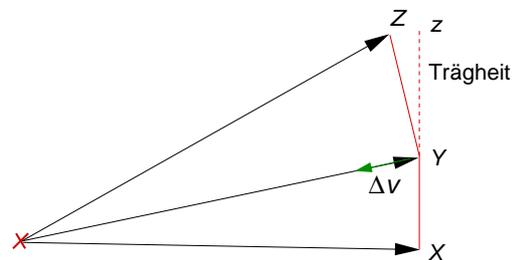


Abbildung 5: Vereinfachte Darstellung der Planetenbewegungen.

Betrachten wir eine vereinfachte Bahnkurve (Abbildung 5). Ein Planet legt den Weg von  $X$  zu  $Y$  zurück. Die Gravitationskraft  $F$  (die wir in dieser Näherung nur als plötzlich angreifend erachten) verursacht eine Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  in Richtung des Gravitationszentrums (mit guter Näherung ist dies die Sonne). Gäbe es diese Geschwindigkeitsänderung bzw. Kraft nicht, würde sich der Planet aufgrund der Trägheit zum Punkt  $z$  bewegen (Newtons 1. Axiom). Erst  $\Delta v$  sorgt dafür, dass  $Z$  erreicht wird und bei Fortsetzung der Vorschrift eine geschlossene Bahn entsteht. Newton fand heraus, dass die Kraft  $F$  gegeben ist über:

$$F \propto \frac{1}{R^2}, \quad (1)$$

Abbildung 6 zeigt eine detailliertere Darstellung mit eingezeichneten Geschwindigkeitsvektoren, die immer tangential zur Bahnkurve zeigen. Uns sollen an dieser Stelle jedoch die notwendigen Daten für  $\Delta v$  und die Ortsvektoren fehlen. Wie lässt sich die Bahn dennoch konstruieren?

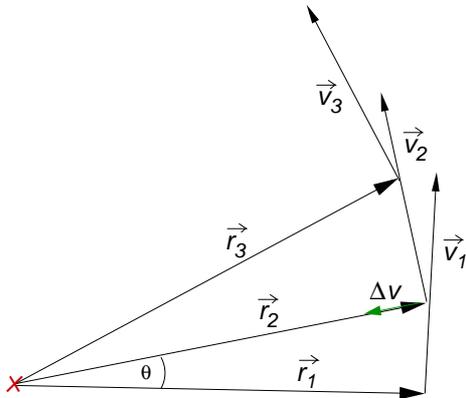


Abbildung 6: Bahnkurve mit eingezeichneten Geschwindigkeiten.

Wir treffen eine Vereinbarung, die Feynman in einer seiner Vorlesungen vorgeschlagen hat: Im Gegensatz zur üblichen Verdeutlichung des 2. Keplerschen Gesetzes, fordern wir eine Einteilung der Bahnkurve in Segmente gleichen Winkels und nicht gleicher Zeit. Für diese Bahnsegmente kann man zeigen, dass die Durchlaufzeit  $\Delta t$  proportional ist zur durchlaufenen Fläche und dem Abstandskadrat  $R^2$ :

$$\Delta t \propto \text{Fläche} \propto R^2. \quad (2)$$

Das zweite Newtonsche Axiom setzt die Änderung der Geschwindigkeit  $\Delta v$  eines Körpers in Beziehung zur Zeit  $\Delta t$ , in der die Kraft  $F$  auf ihn wirkt:

$$\Delta v \propto F \cdot \Delta t.$$

(1) und (2) kombiniert ergibt:

$$\Delta v \propto F \cdot \Delta t \propto \frac{1}{R^2} \cdot R^2 \propto 1.$$

Für konstante Winkelabschnitte der Planetenbahn um die Sonne ist  $\Delta v$  folglich immer konstant! Die Vektoren  $\Delta v$  haben alle die gleiche Länge und verändern ihre Richtung gemäß den Winkeländerungen auf der Bahnkurve. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit einen bestimmten Winkel  $\theta$  wählen, den zwei aufeinanderfolgende  $\Delta v$  einschließen. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich aus Abbildung 6 ein Geschwindigkeitsdiagramm, wie es in Abbildung 7 dargestellt ist.

Es fällt auf, dass die Winkeländerung  $\theta$  im Ortsdiagramm genau dem Winkel entspricht, den zwei Differenzvektoren  $\Delta v$  einschließen. Wählt man einen geeigneten Winkel, so ergibt sich bei Aneinanderreihung der  $\Delta v$  im Geschwindigkeitsdiagramm ein regelmäßiges Vieleck (Abbildung 8), an dessen Eckpunkten die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren enden.

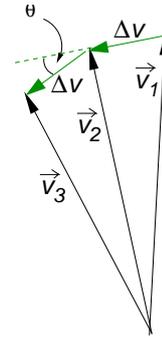


Abbildung 7: Abbildung 6 im Geschwindigkeitsraum.

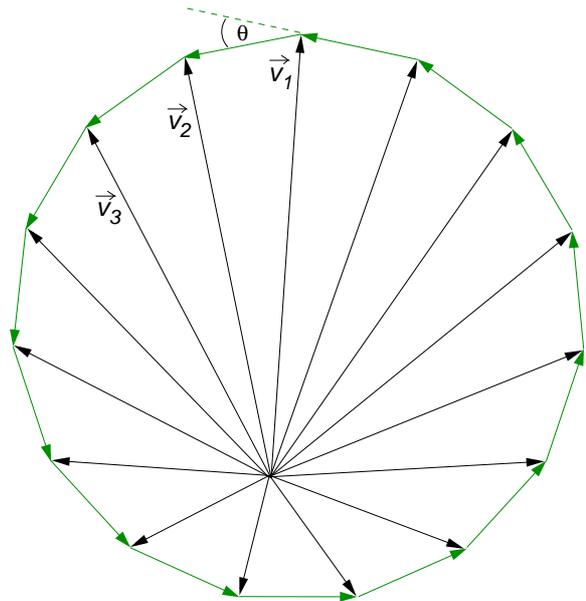


Abbildung 8: Eine Aneinanderreihung der  $\Delta v$  ergibt im Geschwindigkeitsdiagramm einen Kreis.

Der Abbildung 8 kann man entnehmen, dass auf der Bahnkurve in der Tat verschiedene Geschwindigkeiten zustande kommen. Im unteren Teil des Diagramms sind die kleinen Geschwindigkeiten zu finden, im oberen die großen. Wäre die Bahnkurve ein Kreis, so würde man für den Ursprung der Geschwindigkeitsvektoren den Ursprung des entstandenen Kreises im Geschwindigkeitsdiagramm erwarten. Doch im allgemeinen ist dies nicht der Fall. Die Geschwindigkeitsvektoren haben einen Ursprung, der ausserhalb des Kreismittelpunkts liegt.

Die Winkeldifferenz  $\theta$  findet sich aufgrund der regelmäßigen Anordnung der Punkte auch an einer anderen Stelle im Geschwindigkeitsdiagramm wieder: Vom Mittelpunkt des Kreises aus gesehen, schließen zwei aufeinanderfolgende Endpunkte der Geschwindigkeit ebenso den Winkel  $\theta$  ein (Abbildung 9).

Es ist besonders elegant, die Bahnkurve der Planeten direkt in das Geschwindigkeitsdiagramm zu zeichnen. Dazu wird das Diagramm in Abbildung 9 um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht (Abbildung 10). Somit wird also der Winkel  $\theta$  identisch mit jenem, den die Ortsvek-

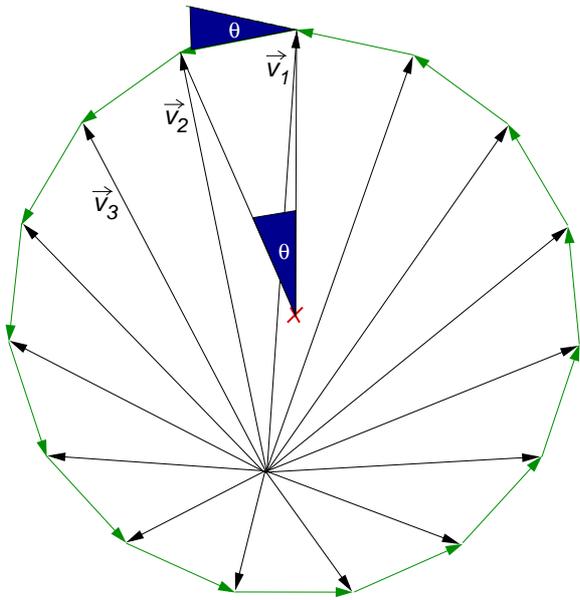


Abbildung 9: Der Winkel  $\Delta v$  ist im Geschwindigkeitsdiagramm ein weiteres Mal zu finden.

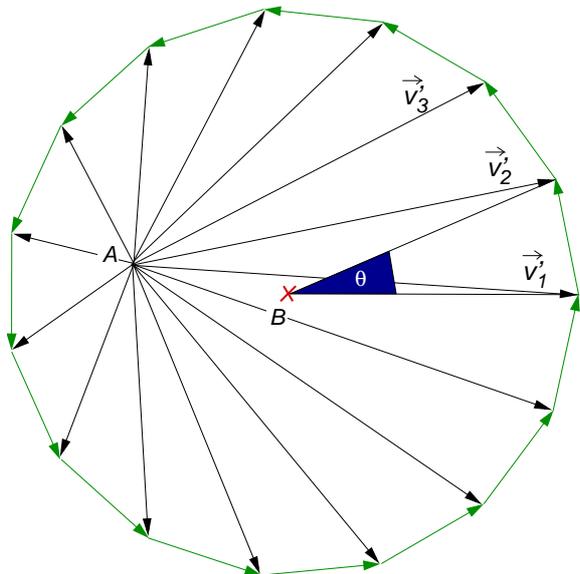


Abbildung 10: Das um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeitsdiagramm. Die Winkelverhältnisse sind mit denen in Abbildung 6 identisch.

toren  $r_1$  und  $r_2$  in Abbildung 6 einschließen. Wählen wir einen willkürlichen Punkt  $p$  auf der Bahnkurve im Ortsraum (Abbildung 11), so ist die Richtung des zugehörigen Ortsvektors  $r_p$  identisch mit der Richtung der Verbindung zwischen dem Mittelpunkt des Kreises und dem Endpunkt des Vektors  $v_p$  (Abbildung 12).

Der Vektors  $v_p$ , stimmt wiederum – von einer  $90^\circ$ -Drehung abgesehen – mit dem wirklichen Geschwindigkeitsvektor  $v_p$  am Punkt  $v_p$  im Ortsraum überein.

Es ist bekannt, dass  $v_p$  in einem Punkt  $p$  die Tangente an die Bahnkurve bilden muss. Ausserdem steht er senkrecht auf  $v_p$ . Daher muss der Schnittpunkt

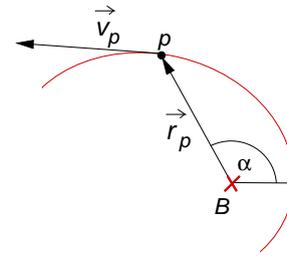


Abbildung 11: Das Ortsdiagramm mit einem willkürlich gewählten Winkel  $\alpha$ .

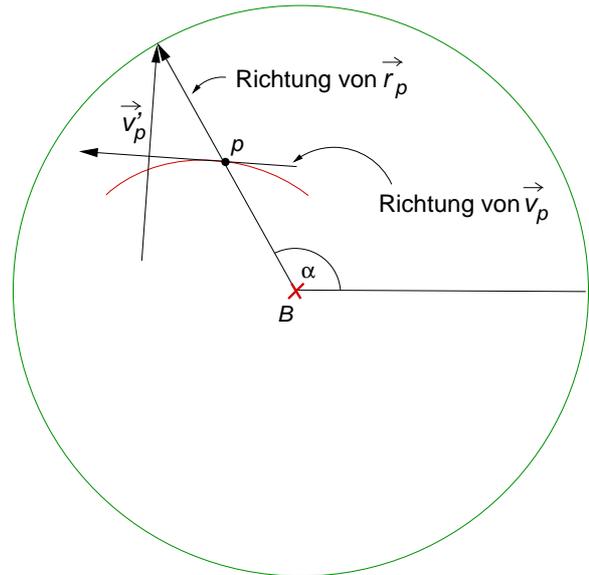


Abbildung 12: Das um  $90^\circ$  gedrehte Geschwindigkeitsdiagramm. Die Winkelverhältnisse sind mit denen in Abbildung 11 identisch.

des Vektors  $v_p$  mit der Richtung des Vektors  $r_p$  im Geschwindigkeitsdiagramm eben jenen Punkt  $p$  der Bahnkurve ergeben (Abbildung 12). Wie im Anhang plausibel gemacht wird, kann nur die Mittelsenkrechte von  $v_p$  gewählt werden, um eine zusammenhängende Kurve zu erhalten. Alle weiteren Punkte auf dem Kreis müssen natürlich mit derselben Konstruktionsvorschrift behandelt werden.

Ein Vergleich mit Abbildung 4 zeigt die Analogie dieses Problems mit dem aus der Spiegelwelt. Die Mittelsenkrechte entspricht dem Ort des Spiegels. Die Forderung nach gleich langen optischen Weglängen ist geometrisch vergleichbar mit der Feststellung, dass alle  $\Delta v$  gleiche Länge besitzen (beides hat einen Kreis zur Folge). Wir können demzufolge durch reinen Übertrag feststellen: Die Bahnkurve ist eine Ellipse.

Zu Beachten ist, dass die im Geschwindigkeitsdiagramm entstandene Bahnkurve nur Aussagen über die Form zulässt. Über die Größe können wir keine Vorhersage treffen, da die Transformation auf den Ortsraum ausschließlich winkelerhaltend ist.

#### 4. Zusammenfassung: Von der Spiegelwelt zu den Planetenbewegungen

In diesem Vortrag wurde gezeigt, dass elementare geometrische Betrachtungen Verbindungen herstellen können zwischen zwei unterschiedlichen Bereichen der Physik. Bei der Untersuchung der Spiegelwelt bzw. des Fermat-Prinzips der Bildentstehung und der Bewegung von Planeten um ein Gravitationszentrum wurden geometrische Analogien gefunden und die Ellipse als Gemeinsamkeit herausgearbeitet. Im Sinne eines kumulativen Wissenszuwachs' trägt dies dazu bei, verschiedenen Konzepten ähnliche abstrakte Gesetzmäßigkeiten unterzuordnen.

#### 5. Anhang

Ohne einen Beweis mathematischer Strenge zu führen, wollen wir uns mit Plausibilitätsargumenten zufrieden geben, warum im Geschwindigkeitsdiagramm (Abbildung 12) immer die Mittelsenkrechte zu  $v_p$  abgetragen werden muss. In Abbildung 13 ist einerseits die Konstruktion über die Mittelsenkrechten eingetragen, andererseits die einer "Viertelsenkrechten". Man erkennt deutlich, dass die Tangenten an den Punkten 1 und 2 nicht einer gemeinsamen Kurve entsprechen können, die eine einzige Krümmungsrichtung aufweist. Dies muss aber der Fall sein, denn es liegt eine Zentralkraft vor. Folglich kann die aus den Viertelsenkrechten

resultierende Kurve nicht der von uns gesuchten entsprechen. Dies ist analog übertragbar für alle weiteren Teilungsverhältnisse.

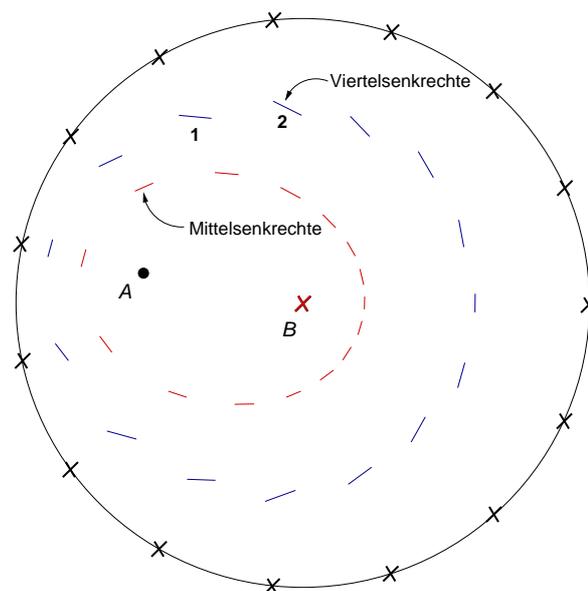


Abbildung 13: Gegenüberstellung einer Konstruktion mit Hilfe der Mittelsenkrechten und der "Viertelsenkrechten".

- [1] DAVID L. GOODSTEIN, JUDITH R. GOODSTEIN: *Feynmans verschollene Vorlesung*. Piper, München, Zürich, 1998.
- [2] ERB, R.: *Geometrische Optik mit dem Fermat-Prinzip*. Physik in der Schule, 30:291–295, 1992.
- [3] ERB, R. L. SCHÖN: *Ein Blick in den Spiegel – Einblick in die Optik*. FISCHER, H.E. (.): *Handlungs- und kommunikationsorientierter Unterricht in der Sek. II*,

Bonn, 1997. F. Dümmlers Verlag.

- [4] SCHÖN, L.: *Ein Blick in den Spiegel – Von der Wahrnehmung zur Physik*. Physik in der Schule, 32(1):2–5, 1994.
- [5] WEBER, T. L.-H. SCHÖN: *Spiegelwelt statt Reflexionsgesetz: Vorschläge zum Anfangsunterricht*. Naturwissenschaften im Unterricht Physik, 60(11):30–36, 2000.