

Vorlesung 2.

# Stabilität: Arten und Kriterien.



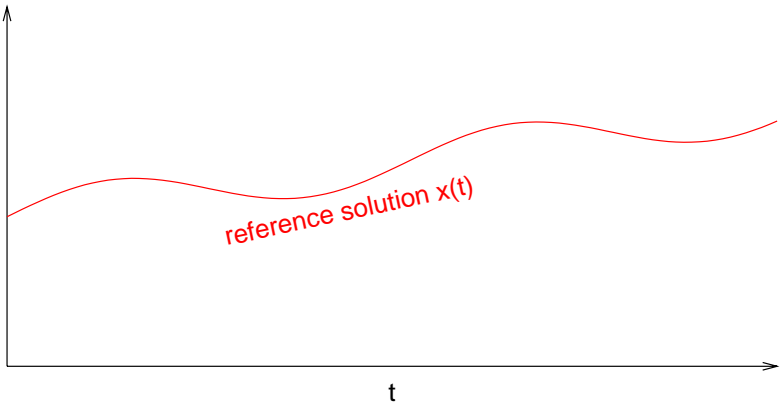


**Stabilität:** Unempfindlichkeit bestimmter dynamischer Merkmale gegenüber (nicht allzu starken) Störungen.

Da die „Unempfindlichkeit“ aber auch die Störungsart sich unterschiedlich deuten lassen, gibt es dementsprechend viele Stabilitätsarten, die nahezu alle (!) physikalisch bedeutsam sind.

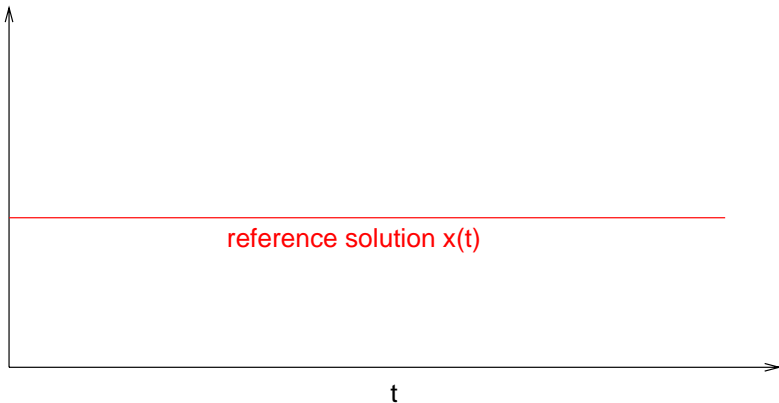


Wir betrachten eine bestimmte Lösung  $x(t)$ :





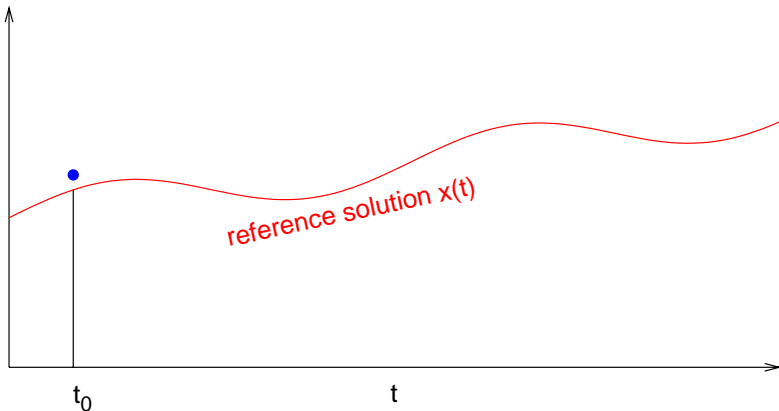
Wir betrachten eine bestimmte Lösung  $x(t)$ :



Es kann (muss nicht) auch ein Gleichgewichtszustand sein



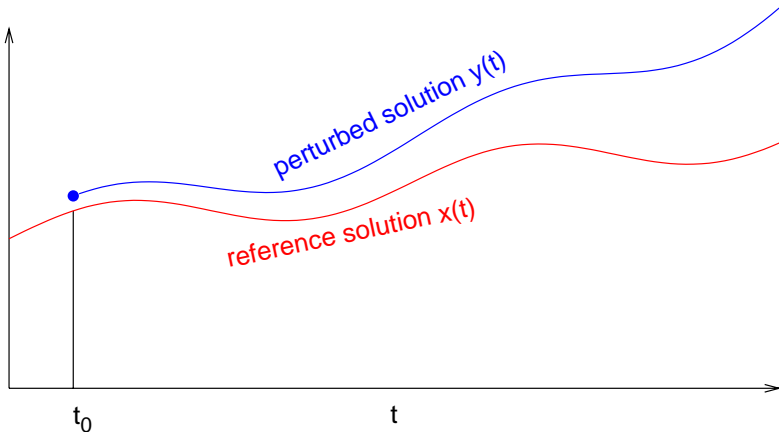
Wir betrachten eine bestimmte Lösung  $x(t)$ :



... fügen eine kleine Störung ein  
und verfolgen deren zeitliche Evolution.



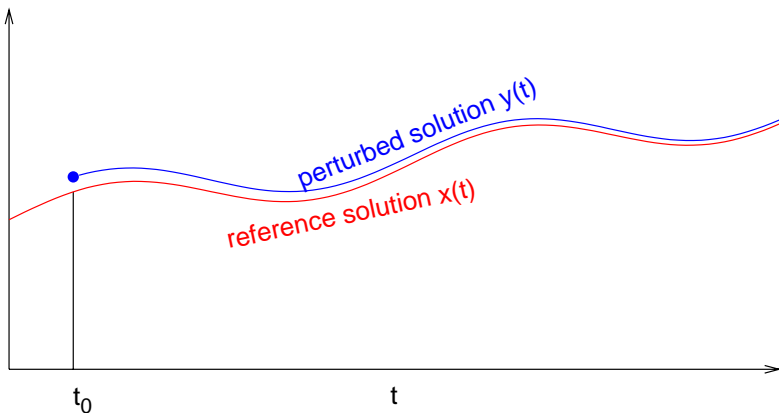
Wir betrachten eine bestimmte Lösung  $x(t)$ :



... fügen eine kleine Störung ein  
und verfolgen deren zeitliche Evolution.  
Die Störung kann wachsen oder abnehmen.



Wir betrachten eine bestimmte Lösung  $x(t)$ :



... fügen eine kleine Störung ein  
und verfolgen deren zeitliche Evolution.  
Die Störung kann mit der Zeit wachsen oder abnehmen.



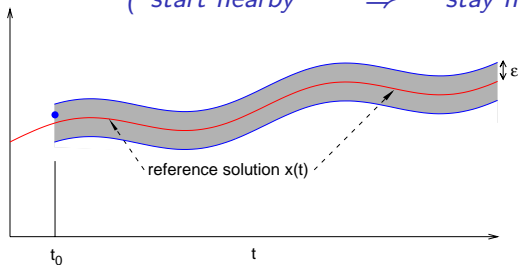
## Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

▷ **Stabilität nach Lagrange.**

$\exists \delta$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t)\| < \infty \quad \forall t > t_0$ .

▷ **Stabilität nach Lyapunov.**

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$ .  
(*“start nearby  $\Rightarrow$  stay nearby”*)







## Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

▷ **Stabilität nach Lagrange.**

$\exists \delta$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t)\| < \infty \quad \forall t > t_0$ .

▷ **Stabilität nach Lyapunov.**

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$ .  
("start nearby  $\Rightarrow$  stay nearby")

▷ **Quasiasymptotische Stabilität.**

$\exists \delta > 0$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$ .

Störungsamplitude wird beliebig klein bei  $t \rightarrow \infty$ .

*Diese Definition erfordert nicht,  
dass die Störung auch bei **allen endlichen** Werten von  $t$  klein gehalten wird,  
aber für die Anwendungen ist es meist wichtig.*



## Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

▷ **Stabilität nach Lagrange.**

$\exists \delta$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t)\| < \infty \quad \forall t > t_0$ .

▷ **Stabilität nach Lyapunov.**

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$ .  
(*“start nearby  $\Rightarrow$  stay nearby”*)

▷ **Quasiasymptotische Stabilität.**

$\exists \delta > 0$  : aus  $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$  folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$ .

▷ **Asymptotische Stabilität.**

Eine Lösung  $x(t)$  heißt asymptotisch stabil, falls sie **gleichzeitig** stabil nach Lyapunov **und** quasiasymptotisch stabil ist.



Stabilitätsarten, relevant für die Lösungen,  
die keine Gleichgewichte sind:  $x(t) \neq \text{const.}$

Beispiel: Konservativer Oszillator mit Kreisbahnen

▷ Harmonisch ( $\ddot{x} + \omega x = 0$ ):  $\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \Rightarrow$  Polarkoordinaten:  $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$

Phasenbahnen: **Kreise**. Winkelgeschwindigkeit: **unabhängig** von der Amplitude.

Eine *Wolke aus Zuständen* dreht sich um den Ursprung wie ein starrer Körper.

$\Rightarrow$  Alle Trajektorien sind **stabil nach Lyapunov!**

▷ Anharmonisch (nichtlinear):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y(1 + \epsilon\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = \omega x(1 + \epsilon\sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \Rightarrow \text{Polarkoordinaten: } \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega(1 + \epsilon r) \end{cases}$$

Explizite Lösung:  $r(t) = r_0 = \text{const.}$ ,  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(1 + \epsilon r_0)t$ .

Phasenbahnen: **Kreise**. Winkelgeschwindigkeit: **abhängig** von der Amplitude  $r$ .

Zwei ursprünglich benachbarte Lösungen mit gleichen Anfangswerten für  $\varphi$  und den Werten von  $r$ , die sich um  $\delta_r$  unterscheiden,

finden sich nach  $t = \pi / (\epsilon \delta_r)$  an unterschiedlichen Enden eines Diameters  $2r_0$ .

$\Rightarrow$  keine Stabilität nach Lyapunov!

Aber die **Bahnen** bleiben dabei einander nah. *Eine andere Art Stabilität?*



Stabilitätsarten, relevant für die Lösungen,  
die keine Gleichgewichte sind:  $x(t) \neq \text{const.}$

▷ **Orbitale Stabilität:**

bei hinreichend kleinen Störungen von Anfangsbedingungen,  
gehen zwar die instantanen Zustände auseinander,  
aber nicht die gesamten Lösungskurven.

▷ **Stabilität „nach Poisson“:** (wiederholte Rückkehr)

Die Trajektorie hat die Umgebung von **jedem** ihrer Punkte  
in beliebig ferner Vergangenheit schon besucht,  
und kommt wieder in die Umgebung von jedem ihrer Punkte  
in beliebig ferner Zukunft. (...unendlich viele mal...)



Für *asymptotisch stabile* Gleichgewichte ist diese Eigenschaft trivial vorhanden:  
sie bleiben zum *jeden* Zeitpunkt da, samt ihrer unmittelbarer Nachbarschaften.

Ebenso für *asymptotisch stabile* periodische Lösungen: (periode  $T$ ):  
sie kehren zurück nach  $kT$ ,  $k = \pm 1, \pm 2 \dots$

Aber auch die **chaotischen** Lösungen sind Poisson-stabil: sie kommen immer  
wieder beliebig nah zurück, obwohl nach unregelmässigen Zeitabständen.



▷ **Strukturelle Stabilität:**

(nicht die Lösungen sondern die Gleichungen werden gestört):

Das System  $\dot{x} = f(x)$  heißt strukturell stabil, falls dessen Dynamik und die Dynamik des Systems  $\dot{x} = f(x) + g(x)$  für alle hinreichend kleinen  $\|g(x)\|$  qualitativ übereinstimmen.

*“qualitativ übereinstimmen”*: ähnliche Phasenportraits, gleiche Anzahl von Gleichgewichten, gleiche Anzahl von geschlossenen Phasenbahnen...

Mathematisch: bei **hinreichend kleinen** Störungen der rechten Seite bleiben das ungestörte und das gestörte System topologisch äquivalent: es existiert eine stetige umkehrbare Abbildung (*Homöomorphismus*), welche **jede** Trajektorie des gestörten Systems in eine Trajektorie des ungestörten Systems überführt und umgekehrt.

- ! Interessant sind natürlich **strukturell instabile** Fälle: eine kleine Änderung der rechten Gleichungsseite reicht, um ein qualitativ anderes Phasenporträt zu erzeugen!



*Alle diese Definitionen schließen die Betrachtung von **allen** (hinreichend kleinen) Störungen ein*

*Im Gegensatz dazu reicht ein einziges Gegenbeispiel für die Abwesenheit der Stabilität (**also, Instabilität**).*

*Muß man tatsächlich **alle** Störungen nacheinander verfolgen? !!!*

*Wir fangen an mit Gleichgewichten:*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x_*) = 0$$



Im Kontext der **Mechanik**  
bekommt diese Fragestellung eine relativ einfache Antwort.

Wohin steuert bei  $t \rightarrow \infty$  ein Teilchen,  
dass sich in Anwesenheit einer schwacher **Reibung**  
und ohne **Energiezufluss** entlang einer Potentiallandschaft bewegt?

Natürlich in ein Minimum von Potential.

Der Grund: Gesamtenergie kann mit der Zeit **nur abnehmen**.

Ein Minimum von Potential entspricht einem Gleichgewicht:  
da verschwindet die Kraft identisch.

Dieses Gleichgewicht ist offensichtlich mechanisch stabil:  
um die Potentialmulde zu verlassen, muss die Gesamtenergie wachsen.

Wie kann man diese Denkweise  
für den **nicht-mechanischen** Kontext verallgemeinern?



$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\text{Gleichgewicht } \mathbf{x}_*: \quad f_i(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \forall i$$

Wir betrachten eine Umgebung  $G$  des Fixpunktes  $\mathbf{x}_*$  und eine differenzierbare Funktion  $V(\mathbf{x})$ , definiert in  $G$ .

Zeitableitung:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x})$$

Die Funktion  $V(\mathbf{x})$  heißt **Lyapunov-Funktion**, falls sie:

a) ihren minimalen Wert in  $G$  im Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{x}_*$  annimmt:

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_* \in G, \quad V(\mathbf{x}) > V(\mathbf{x}_*) ,$$

b) nirgendwo in  $G$  mit der Zeit zunehmen darf:

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$





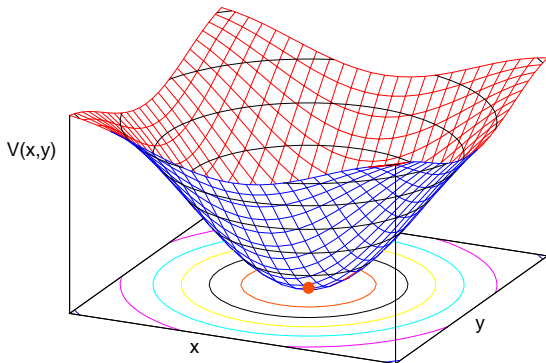
### Theoreme von Alexander Lyapunov:

1. Falls  $\exists$  eine Umgebung  $G$  des Gleichgewichts  $\mathbf{x}_*$ ,  
und in ihr  $\exists$  eine Lyapunov-Funktion  $V$ ,  
dann ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}_*$  **stabil nach Lyapunov**.
2. Falls  $dV/dt < 0$  in ganz  $G$  außer im Punkt  $\mathbf{x}_*$  selbst,  
dann ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}_*$  **asymptotisch stabil**.

*Uns bleibt nur die Lyapunov-Funktion zu finden (zumindest eine...)*



In der Nähe von einem Minimum  $\mathbf{x}_*$   
sind Isoflächen (Isolinien) von  $V(\mathbf{x})$  geschlossene Flächen (Kurven).



Eine Trajektorie kann die Umgebung vom Minimum  $\mathbf{x}_*$  nicht verlassen:  
das würde nur über Wachstum von  $V(\mathbf{x})$  gehen, aber  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ .



Beispiel 1. Nichtlineare Oszillator  $\ddot{x} + c\dot{x} + ax + bx^3 = 0$   
mit positiven  $a, b, c$ .

1. Umschreiben:  $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -cy - ax - bx^3$ .  
Gleichgewicht:  $x = y = 0$ .
2. Wir suchen eine Funktion in der Klasse  $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma y^2$   
(gerade Potenzen!) mit positiven  $\alpha, \beta, \gamma$ .  
Offensichtlich,  $V(x, y) > V(0, 0) = 0$ .
3.  $\dot{V} = 2\alpha x\dot{x} + 4\beta x^3\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} =$   
 $= (2\alpha - 2\gamma a)xy + (4\beta - 2\gamma b)x^3y - 2\gamma cy^2$ .
4. Der letzte Summand ist schon in Ordnung,  
... und die ersten zwei können wir verschwinden lassen  
(dank der Freiheit in der Wahl von Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$ ):  
 $(2\alpha - 2\gamma a) = (4\beta - 2\gamma b) = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha/a, \beta = \alpha b/(2a)$ .
5. Nun ist  $dV/dt = -2\gamma cy^2 \leq 0$  für alle  $x, y$   
 $\Rightarrow$  Gleichgewicht  $x = y = 0$  ist **global** stabil nach Lyapunov.



## Beispiel 2. Das System

$$\dot{x} = -x + x^2 - 2xy,$$

$$\dot{y} = -2y - 5xy + y^2,$$

Gleichgewicht:  $x=y=0$ .(Es gibt auch andere Gleichgewichte, z.B.  $x=0, y=2$  oder  $x=1, y=0$ ).

1. Erstbester Kandidat für  $V$ :  $V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ .

Offensichtlich,  $V(x, y) > V(0, 0) = 0$ .

2.  $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(-x + x^2 - 2xy) + y(-2y - 5xy + y^2)$

...  $= -x^2(1 - x + 2y) - y^2(2 + 5x - y)$

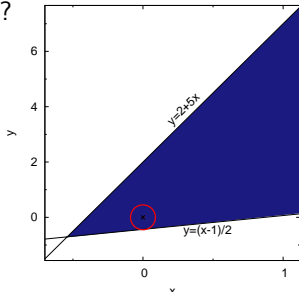
3. Wo gilt  $y > (x-1)/2$  und  $y < 2+5x$  gleichzeitig?

Im keilförmigen Bereich der Phasenebene,  
zu dem auch das Gleichgewicht gehört.

4. In diesem Keil gilt:  $dV/dt \leq 0 \forall x, y$

 $\Rightarrow$  Gleichgewicht  $x=y=0$ 

ist asymptotisch stabil.





## Lineare Stabilität

- ▷  $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Gleichgewicht  $\mathbf{x}_*$ :  $f_i(\mathbf{x}_*) = 0 \forall i$ .
- ▷ Evolution von kleinen Abweichungen  $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$ :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\xi\|^2), \text{ oder } \dot{\xi} = J \xi + O(\|\xi\|^2);$$

hier  $J$  ist Jacobi-Matrix des Systems, berechnet im Fixpunkt  $\mathbf{x}_*$ .



Brook Taylor



Carl Jacobi



## Lineare Stabilität

▷  $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Gleichgewicht  $\mathbf{x}_*$ :  $f_i(\mathbf{x}_*) = 0 \forall i$ .

▷ Evolution von kleinen Abweichungen  $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$ :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\xi\|^2), \text{ oder } \dot{\xi} = J \xi + O(\|\xi\|^2);$$

hier  $J$  ist Jacobi-Matrix des Systems, berechnet im Fixpunkt  $\mathbf{x}_*$ .

▷ Annahme: alle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  der Matrix  $J$  sind reell, negativ und paarweise unterschiedlich.

▷ Nach dem Übergang in ein neues Koordinatensystem, in dem die Koordinaten  $y$  entlang der Eigenvektoren von der Matrix  $J$  gerichtet sind, gilt:  $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O(\|y\|^2)$ .

▷ Wir führen  $V(y) = \frac{1}{2} \sum_j y_j^2$  ein.

$$dV/dt = \sum_j \lambda_j y_j^2 + O(\|y\|^3) \leq 0 \Rightarrow V - \text{Lyapunov-Funktion.}$$



## Lineare Stabilität

- ▷ Analog funktioniert es in den Fällen, in denen manche Eigenwerte paarweise gleich oder paarweise komplex konjugiert sind.  
Wir leiten ab:

$$dV/dt = \sum_j \operatorname{Re}(\lambda_j) y_j^2 + O(\|\mathbf{y}\|^3)$$

- ▷ Daraus folgt eine **hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität eines Gleichgewichts**:

Ein Gleichgewicht ist asymptotisch stabil, falls  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0 \quad \forall j$ .



Zurück zur Evolution kleiner Abweichungen  $\xi_j \equiv x_j - x_{*j}$ :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\xi\|^2):$$





Zurück zur Evolution kleiner Abweichungen  $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$ :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j$$

- ▷ lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.
- ▷ Allg.Lösung:  $\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_N e^{\lambda_N t}$ .
- ▷ Für komplexe  $\lambda = \rho + i\omega$ :  $e^{\lambda t} = e^{\rho t} e^{i\omega t}$ .
- ▷ Hinreichende Bedingung einer **Instabilität**:  $\exists j : \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ .
- ▷ Zusammenfassung:  
Stabilität eines Gleichgewichts erfordert

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \forall j$$

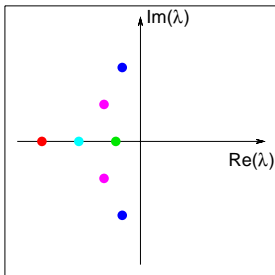


Bei einem Gleichungssystem  $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

1. Gleichgewicht  $\mathbf{x}_*$  finden.
2. An diesem Gleichgewicht Jacobi-Matrix  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  bestimmen.
3. Alle  $N$  Eigenwerte der Jacobi-Matrix berechnen.
4. Sind **alle** Eigenwerte negativ bzw. haben negative reelle Teile, dann ist das Gleichgewicht **asymptotisch stabil**.
5. Gibt es hingegen mindestens **einen** Eigenwert mit dem positiven reellen Teil, dann ist das Gleichgewicht **asymptotisch instabil**.



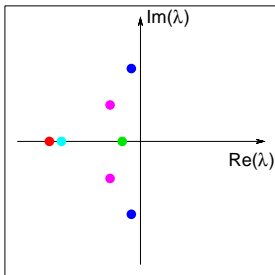
## Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter  $\mu$  abhängt, dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix  $\mu$ -abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit  $\mu$ .



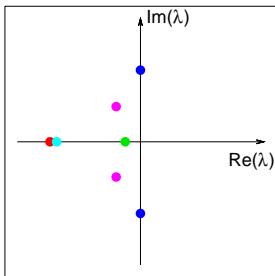
## Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter  $\mu$  abhängt, dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix  $\mu$ -abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit  $\mu$ .



## Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter  $\mu$  abhängt, dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix  $\mu$ -abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit  $\mu$ .

Dabei kann ein stabiles Gleichgewicht instabil werden, oder umgekehrt.