Vorlesung 6.

Bifurkationen I: Allgemeine Überlegungen; Invariante Mannigfaltigkeiten

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System N-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im N-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein N-Vektor zugeordnet mit Komponenten

$$\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big).$$

- Gesamtheit dieser Felder bildet auch einen Raum:

  Raum dynamischer Systeme N-er Ordnung.

  Jeder Punkt in diesem Raum ist ein Vektorfeld (ein dyn.System).

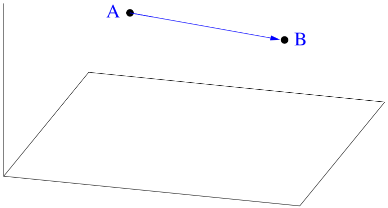
  Kontrollparameter – Koordinaten in diesem Raum.

  (deswegen spricht man auch vom Parameterraum):

  m Parameter $\Rightarrow$ m-dimensionaler Parameterraum.

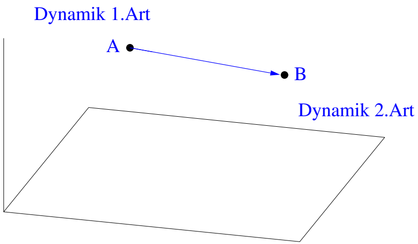
- Variation von einem/mehreren Kontrollparameter:
  Bewegung durch den Parameterraum, kontinuierliche Änderung vom System.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Keine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

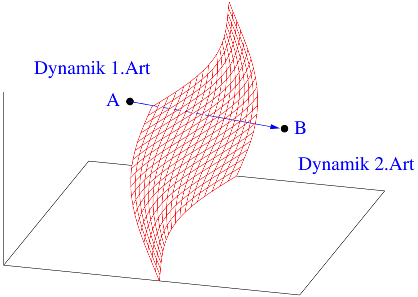


Jeder Pfad von A nach B ist durch einen Parameter parametrisierbar:
1-param. Famile von DS

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

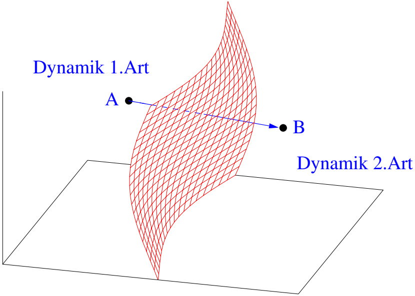


Unterwegs findet eine Bifurkation statt.

Gebiete mit derselben qualitativen Dynamik *(selbe Anzahl von Gleichgewichten, selbe Anzahl von positiven/negativen Eigenwerten bei jedem davon usw.)* sind m-dimensionale Objekte im m-dimensionalen Parameterraum.

▷ Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt, die diese Gebiete voneinander trennen.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt:

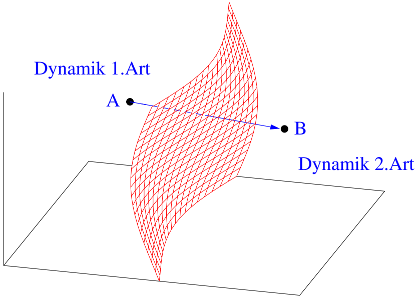
- für Systeme mit einem Parameter (m=1) – in den Punkten,
- für Systeme mit zwei Parametern (m=2) – auf den Linien,
- für Systeme mit drei Parametern (m=3) – auf den 2D-Flächen,

...

- Dabei kann es in allen Fällen dieselbe Bifurkation sein
  (z.B. Zusammenstoß und Verschwinden von zwei Gleichgewichten)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Bifurkationen finden an $(m–1)$-dimensionalen Flächen statt.

Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,
- oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, ...

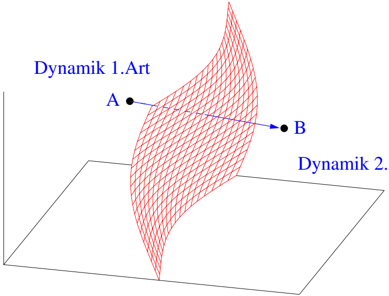
Gesamtanzahl dieser Bedingungen nennt man Kodimension:

Dimension, die bis zur „vollen“ (m) fehlt.

(z.B. Zusammenstoß von zwei Gleichgewichten hat Kodimension 1.)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

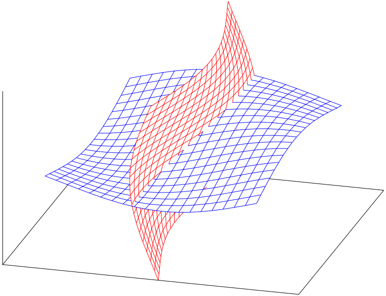
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Beispiel von Bifurkation mit Kodimension 1
(Bifurkationsfläche trennt voneinander Volumen im Parameterraum)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

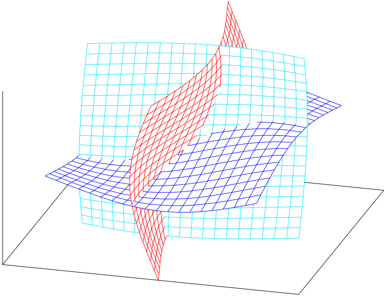
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

ihr gemeinsames Auftreten hat Kodimension 2:

„fehlende" Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

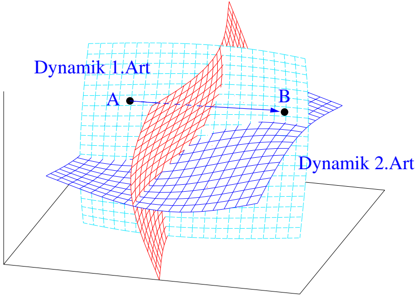
gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

Wichtig: Es sind in 1-parametrigen Familien von d.S.
nur Bifurkationen von Kodimension 1 prinzipiell unvermeidbar.

Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit W^s eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  (bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^s gleich Einzugsgebiet).
- Instabile Mannigfaltigkeit W^u eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  (bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^u ist nur $\boldsymbol{x}_0$ selbst).

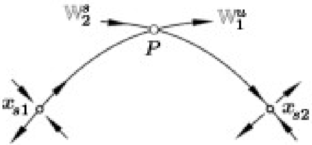
  Beide sind offensichtlich invariant:
  jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu W^s
  jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu W^u.

Invariante Mannigfaltigkeiten

A und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

▷ Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
können sich im Phasenraum nicht schneiden.

(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)



unmöglich !

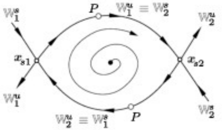
Invariante Mannigfaltigkeiten

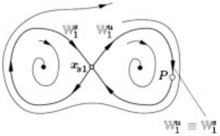
A und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- ▷ Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)

- ▷ *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten*
  können sich im Phasenraum schneiden.





▷

Invariante Mannigfaltigkeiten

A und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum schneiden.*
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ vom Gleichgewicht A nach Gleichgewicht B:*
  $(\lim_{t\to-\infty}\Gamma(t)=\boldsymbol{A},\ \lim_{t\to\infty}\Gamma(t)=\boldsymbol{B})$
  heißt Heterokline (biasymptotische Trajektorie)
  heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ von A nach A:* $\lim_{t\to\pm\infty}\Gamma(t)=\boldsymbol{A}$
  heißt Homokline (biasymptotische Trajektorie)
  homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

Da eine Homokline eine geschlossene Bahn bildet,
ist sie ein Grenzfall: periodische Bewegung mit unendlicher Periode.
Ähnlich: Verbindung zweier Heteroklinen $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}$ (heteroclinic contour)
ist ebenso eine geschlossene Bahn.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts x_0.

(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik).

- ▷ Sei n Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht x_0 mit negativen reellen Teilen.

  n Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen n-dimensionalen linearen Unterraum U^n.
- ▷ Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im U^n anfängt, endet in x_0.

  (und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören).
- ▷ Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die außerhalb U^n anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht x_0.

  (und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit nicht gehören).

$\Rightarrow$ Auch bei dem ursprünglichen nichtlinearisierten System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von x_0) n-dimensional sein.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \;\; \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- n Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \leq n \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen n-dim. linearen Unterraum E^n,
- p Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \leq p \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen p-dim. linearen Unterraum E^p.

$$n + p = N.$$

- Satz: Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension n; c) ist genauso glatt wie $\boldsymbol{F}$, und
  d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum E^n.
- Satz: Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension p; c) ist genauso glatt wie $\boldsymbol{F}$, und
  d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum E^p.

Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- da $n = p = 1$, sind W^s und W^u beide 1-dimensional.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?

- z.B. stabile Mannigfaltigkeit W^s:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.

- Als eine Linie, kann W^s (lokal !) durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. durch x: $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$

- Substitution in die 2.Gleichung + Kettenregel ergeben

$$h'(x) f\big(x, h(x)\big) = g\big(x, h(x)\big),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

- Explizit ist diese Gleichung meist nicht lösbar,
  aber sukzessiv kann man $h(x)$ durch die Potenzreihe bestimmen.

Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y - x^2$$

▷ Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: 1 and -1. Eigenvektoren: Achsen.

▷ Stabile Mannigfaltigkeit W^s tangiert im Ursprung die x-Achse.
Instabile Mannigfaltigkeit W^u tangiert im Ursprung die y-Achse.

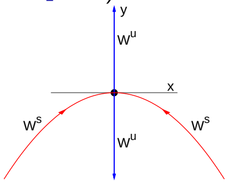
▷ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

(mit offensichtlichen $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$).

▷ Einsetzen in $h' \dot{x} = \dot{y} = h(x) - x^2$

▷ $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$

▷ Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -x^2/3$.



▷ Instabile Mannigfaltigkeit (in diesem Fall trivial): y-Achse $x = 0$.