

Vorlesung 15.

# Allgemeine Eigenschaften chaotischer Dynamik. Lyapunov-Exponenten.





- ▶ Jede Realisierung von einem chaotischen dynamischen System ist unvorhersagbar. Welche Aussagen sind hier trotzdem möglich?
- ▶ Zum Beispiel: was sagt uns eine Mittelung über chaotische Trajektorien?
- ▶ Wir ersetzen ein einzelnes System durch ein großes Ensemble aus identischen Kopien von diesem dynamischen System. Der Evolutionsoperator ist für alle derselbe; der einzige Unterschied besteht in den Anfangsbedingungen.
- ▶ Im Phasenraum wird dieses Ensemble zu jedem Zeitpunkt durch eine Wolke von Punkten dargestellt.
- ▶ Jedes Ensemble-Mitglied (Punkt) bewegt sich entlang **seiner** Phasenkurve; diese Kurven sind in der Regel zueinander nicht parallel, entsprechend wird sich die Wolke im Laufe der Zeit *verschieben, umformen, verdichten* usw.



Wir fangen mit einem einfachem System an:

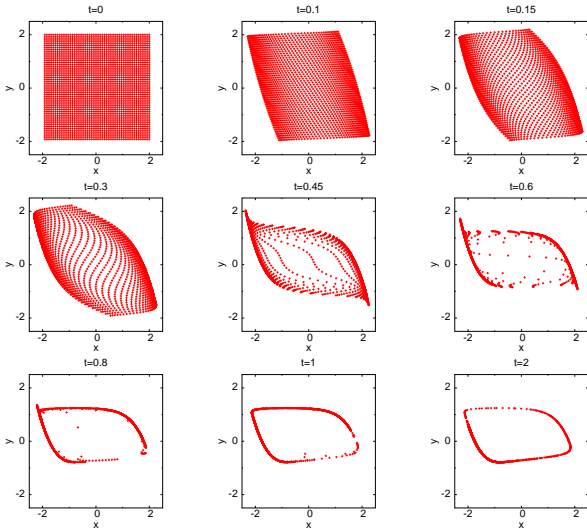
FitzHugh-Nagumo Gleichungen im oszillatorischen Zustand.

$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$

und nehmen ein Ensemble aus  $50 \times 50$  Anfangsbedingungen,  
homogen verteilt auf der Phasenebene.



$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$





Wir beschreiben die Evolution der Wolke von dynamischen Systemen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  durch die Verteilungsdichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .

Die Dichte wird normiert:  $\int \rho(\mathbf{x}, t) dV = 1$ .

$\rho(\mathbf{x}, t)dV$  ist die relative Anzahl von Systemen im Volumen  $dV$  am Ort (des Phasenraums)  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Mittelung über Ensemble ergibt zeitabhängige Observablen  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ :

$$\langle f \rangle(t) = \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV$$

Anzahl von Systemen im Ensemble bleibt konstant:  
sie werden weder erzeugt noch vernichtet.

Aus diesem Erhaltungsgesetz folgt die Bilanzgleichung für die Dichte:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\mathbf{F}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Grenzwerte von der Dichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$  bei  $t \rightarrow \infty$  sind meist **singulär**.

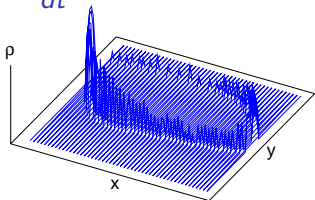


Grenzwerte von  $\rho(\mathbf{x}, t)$  bei  $t \rightarrow \infty$  werden meist **singulär**:

In Systemen mit einem **global** stabilen Gleichgewicht zieht sich mit der Zeit die ganze Wolke zum einzigen Punkt und bildet da eine  $\delta$ -Funktion.

In Systemen mit einem Grenzzyklus verteilt sich die Wolke entlang einer geschlossener Linie.

$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$



Die Höhe wird größer entlang den **langsamen** Segmenten.

In Systemen mit einem **seltsamen Attraktor** zieht sich die Wolke zu einem singulären Objekt über einer fraktalen Menge.



Für die Charakterisierung dieser Verteilungen wird der Begriff von einem **Maß** benutzt.

*Maßverteilung*: jeder (messbaren) Untermenge im Phasenraum entspricht eine nichtnegative Zahl: ein **Maß**. Maß ist additiv.

Die meisten Punkte wandern mit der Zeit, und der Maß ändert sich.

Eine besondere Anfangsmaßverteilung, bei der das Maß jeder Untermenge in der Zeit konstant bleibt, wird **invariantes** Maß genannt.

Ensemble-Mittelung für eine Observable wird zum Integral über das invariante Maß  $\mu$ :

$$\langle f \rangle = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$

Existenz von  $\mu$  ist bewiesen für eine beschränkte Dynamik.

Es kann aber **viele** unterschiedliche invariante Maße geben, z.B. bei einer Koexistenz von **mehreren** Gleichgewichten und/oder periodischen Lösungen, unabhängig von deren Stabilität.



## Natürliches invariantes Maß

Wir wählen einen Anfangspunkt  $\mathbf{x}_0$  aus,  
und definieren das Maß jeder Untermenge  $D$  im Phasenraum  
als relative Verbleibzeit in  $D$  einer Trajektorie, die in  $\mathbf{x}_0$  anfängt:

$$\mu(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{U}^{t(0 < t < T) : x(t) \in D}}{T}$$

Bleibt der Wert von  $\mu(D)$  für alle  $D$  und fast alle  $\mathbf{x}_0$  konstant,  
so nennt man  $\mu$  *das natürliche Maß* vom dynamischen System.

Der Existenzbeweis ist schwierig, und funktioniert nicht immer,  
aber dafür ist die Mittelung über  $\mu$  äquivalent zur Mittelung  
über die Verteilung  $\rho(\mathbf{x}, t)$  im Grenzwert  $t \rightarrow \infty$ :

$$\langle f \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$





## Ergodizität

Ein System heißt **ergodisch**, falls es gilt:

für jede stetige Observable  $f(\mathbf{x})$  und **fast jede** Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$   
(mit Ausnahme der Trajektorienmenge mit Maß 0),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}(t)) dt = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$

Damit werden **Zeitmittelung** und **Ensemblemittelung** äquivalent:  
eine ausreichend lange Phasentrajektorie liefert  
die ganze Information über das System.

Chaotische Dynamik ist ergodisch,  
aber ein nichtchaotisches System  
(z.B. quasiperiodische Bewegung auf einem Torus)  
kann diese Eigenschaft ebenso besitzen.



## Mischung

Chaos bedeutet Unvorhersagbarkeit:  
kleine Ungenauigkeiten bei Anfangsbedingungen  
verursachen große Abweichungen in der Langzeitspektive.

- ▷ Wir betrachten ein chaotisches System mit dem natürlichen Maß  $\mu$ .  
Evolutionoperator  $F^t$  über die Zeit  $t$   
(eindeutig definiert für alle positive und negative  $t$ )  
wird als  $F^t$  bezeichnet.
- ▷ Sei  $D_0$  ein Anfangsbereich im Phasenraum mit Maß  $\mu(D_0)$ .  
Mit der Zeit verteilen sich die Systeme aus  $D_0$   
in dem ganzen zugänglichen Teil vom Phasenraum.
- ▷ Maß von „Teilchen“ aus  $D_0$ , die sich zur Zeit  $t$   
in einem beliebigen „Kontrollbereich“  $D_1$  befinden, beträgt



$$\mu(F^t(D_0) \cap D_1)$$



## Mischung

Nach einer ausreichend langen Zeit, wird ein relativer Anteil von Teilchen aus  $D_0$ , die sich im  $D_1$  befinden, nur von  $\mu(D_1)$  abhängen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(F^t(D_0) \cap D_1)}{\mu(D_0)} = \mu(D_1)$$

Herkunft der Teilchen (Anfangsbereich  $D_0$ ) wird dabei „vergessen“! Gilt das für alle  $D_0$  und  $D_1$ , so sagt man, dass das System **mischt**.

- ▷ Mischung bedeutet Dekorrelation.

Aus der Anwesenheit von Mischung folgt es für zwei beliebige stetige Observablen  $f(\mathbf{x})$  und  $g(\mathbf{x})$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle f(F^t(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \rangle \langle g(\mathbf{x}) \rangle$$

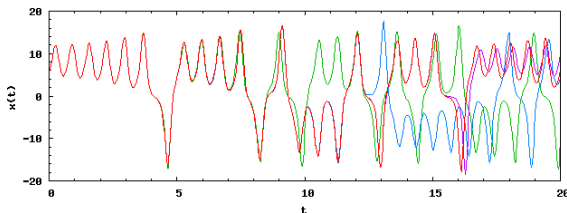
- ▷ *Mischung vs. Ergodizität*: jedes mischende System ist ergodisch, aber **nicht jedes** ergodische System mischt.



## Sensibilität gegenüber Störungen

Am Beispiel von den Lorenz-Gleichungen haben wir gesehen, dass die benachbarten chaotischen Trajektorien sich rasch voneinander entfernen.

Kein chaotischer Orbit ist asymptotisch stabil.



Um dieses Phänomen quantitativ zu charakterisieren, gibt es ein Werkzeug: **Lyapunov-Exponenten**.



- ▷ Wir fangen an im  $\mathcal{R}^N$  mit der Referenzlösung  $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

- ▷ Kleine Störung  $\tilde{\mathbf{x}}$ :  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$

- ▷ Taylor-Entwicklung (*komponentenweise*):

$$\dot{x}_i^{(0)}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) = F_i(\mathbf{x}^{(0)}(t)) + \sum_j \left. \frac{\partial F_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}(t)} \tilde{x}_j(t) + O(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$$

- ▷ Jacobi-Matrix ist **zeitabhängig**  
und wird an der Referenzlösung  $\mathbf{x}^{(0)}(t)$  berechnet.

- ▷ Linearisierung:  $\dot{\tilde{x}}_i(t) = \sum_j \underbrace{\frac{\partial F_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j}}_{A_{ij}(t)} \tilde{x}_j(t)$

- ▷  $\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)$ :  
**homogene lineare DGL mit zeitabhängigen Koeffizienten.**

- ▷ Zusätzliche Bedingung:  $\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt < \infty \quad \forall i, j.$



## Satz von Lyapunov:

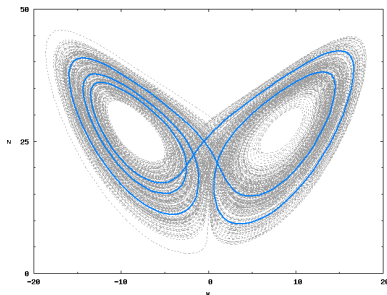
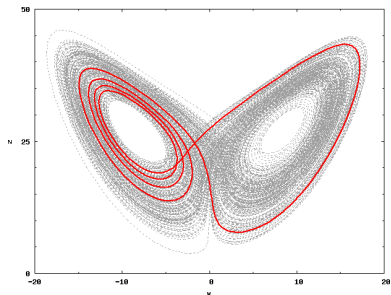
1. Für jede Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \exists \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|} \right) \equiv \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} < \infty$   
 $\Rightarrow \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \sim \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| e^{\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} t}$
2. Es gilt für beliebige konstante  $C$ :  $\Lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}} = \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}}$ ;  
 $\Lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1 + C_2\tilde{\mathbf{x}}_2} \leq \max(\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_1}, \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_2}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2$  und beliebige Faktoren  $C_1, C_2$ .
3. Es gibt insgesamt  $N$  linear unabhängiger Lösungen  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  (Fundamentalmatrix), jede mit eigenem Wert von  $\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_j}$
4. Die **geordneten** Werte  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$  bilden das Spektrum von charakteristischen (**Lyapunov**)-Exponenten, die alle mögliche Störungen von  $\mathbf{x}^{(0)}(t)$  beschreiben.
5. Asymptotische Stabilität von  $\mathbf{x}^{(0)}(t)$  erfordert:  $\Lambda_1 \leq 0$ .  
Für die Instabilität reicht  $\Lambda_1 > 0$ .



- ▶ Für die Trajektorien auf dem Lorenz-Attraktor ist offensichtlich mindestens  $\Lambda_1$  positiv: (Numerik:  $\Lambda_1 \approx 0.9056 \dots$ )
- ▶ Der Satz von  $\{\Lambda_j\}$  charakterisiert nur die Referenzlösung  $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ ; *muss dieser Satz für jeden Orbit auf dem chaotischen Attraktor neu berechnet werden?*
- ▶ **Nein!** Multiplikative Ergodensatz von Oseledec (1968): *In einem System mit dem natürlichen invarianten Maß besitzt fast jede Lösung denselben Satz von Lyapunov-Exponenten.*
- ▶ Interpretation:  $\{\Lambda_j\}$  entstehen als einer Art Zeitmittelung von der Jacobi-Matrix. Jede chaotische Trajektorie ist dicht auf dem Attraktor: sie besucht **jeden** seiner Winkel.  
Dadurch besitzt eine Schar solcher Trajektorien dieselben Mittelwerte.
- ▶ Was bedeutet „fast“? z.B. die *instabilen periodischen Lösungen* im Attraktor haben endliche Längen und kommen nicht überall hin. Deswegen dürfen sie andere Mittelwerte haben.  
Aber sie bilden eine Ausnahme, **eine Menge vom Maß 0!**



## Typical orbits vs. exceptions



Punkte: chaotischer Orbit, dicht überall auf dem Attraktor.  
Linien: UPOs.





- ▶ Störungen **entlang** der Lösungskurven sind in *autonomen* dynamischen Systemen neutral: weder wachsen sie noch schrumpfen sie. Deswegen ist einer der Lyapunov-Exponenten in diesen Systemen immer **0**.
- ▶ Für die Summe aller Lyapunov-Exponenten gilt:

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dt$$

(zeitliche Mittelwert von Divergenz)

- ▶ Deswegen ist in **dissipativen** Systemen immer  $\sum_{j=1}^N \Lambda_j < 0$ ,  
und in **konservativen** Systemen:  $\sum_{j=1}^N \Lambda_j = 0$ .

Lorenz-Attraktor:  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = -(\sigma + b + 1)$  und  $\Lambda_2 = 0$ .  
 $\Rightarrow \Lambda_3 = -(\sigma + b + 1) - \Lambda_1$ .

- ▶ Bei mehreren (**> 1**) positiven Lyapunov-Exponenten spricht man (gelegentlich) vom **Hyperchaos**.



In dynamischen Systemen mit **diskreten** Zeit (Abbildungen) sind Lyapunov-Exponenten etwas einfacher zu berechnen: Jacobi-Matrix wird nicht **integriert bezüglich der Zeit**, sondern **iteriert**.

Besonders einfach werden die Rechenvorschriften bei **ein-dimensionalen Abbildungen**  $x_{i+1} = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ : an der Stelle der Jacobi-Matrix tritt die lokale Ableitung

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ auf.}$$

Es gibt nur **einen** Lyapunov-Exponent, und dessen Wert ist

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right).$$

In **linearen** und **stückweise-linearen** Abbildungen ist diese Ableitung **konstant**.



Beispiel 1: Bernoulli-mapping.

Sie ist stückweise linear, stückweise stetig und bildet das Intervall  $(0, 1]$  in sich:

$$x_{i+1} = 2x_i \bmod 1 = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2x_i - 1 & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

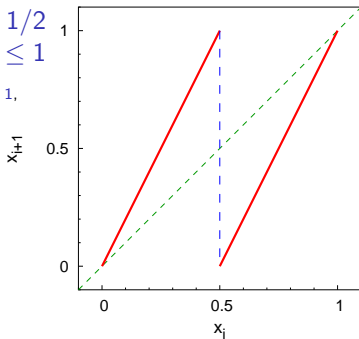
(Bernoulli-mapping kam – noch namenslos – am Ende der Vorlesung 1, als Beispiel von Problemen, wo Vorhersagen problematisch werden).

Jede rationale Zahl  $x = \frac{p}{q}$   
( $p < q$  sind ganz und positiv) liegt auf einer periodischen Trajektorie, die sich nach  $q$  Iterationen schließt.

Alle periodische Trajektorien sind instabil.

$$\text{Lyapunov-Exponent: } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 2^n = \ln(2) > 0$$

⇒ Bernoulli-mapping ist chaotisch.





Beispiel 2: **Tent-mapping** (Zelt-Abbildung?)

Sie ist stückweise **stetig** und bildet das Intervall  $[0, 1]$  in sich:

$$x_{i+1} = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2 - 2x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

(Bernoulli-mapping mit der „umgeklappten“ rechten Hälfte.)

Jede **rationale** Zahl  $x = \frac{p}{q}$   
( $p < q$  sind ganz und positiv) liegt  
auf einer periodischen Trajektorie,  
die sich nach  $q$  Iterationen schließt.

Alle periodische Trajektorien sind **instabil**.

Lyapunov-Exponent:  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(2) > 0.$

⇒ Tent-mapping ist **chaotisch**.

