

Vorlesung 16

Übergang *Ordnung*  $\Leftrightarrow$  *Chaos*.  
Universelle Bifurkationsszenarien.





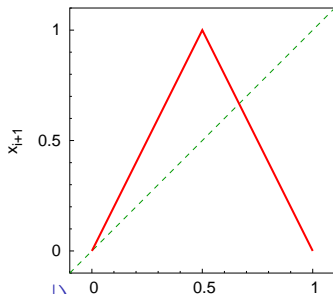
Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Woher kommt die **unendliche** Anzahl von instabilen periodischen Lösungen?

Beispiel: stückweise-stetige **Tent-mapping** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2 - 2x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

Jede **rationale** Zahl  $x = p/q$   
( $p < q$  sind ganz und positiv)  
liegt auf einer periodischen Trajektorie,  
die sich nach  $q$  Iterationen schließt.  
Alle periodische Trajektorien sind **instabil**.



Lyapunov-Exponent:  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(2) > 0.$

$\Rightarrow$  Tent-mapping ist **chaotisch**.



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

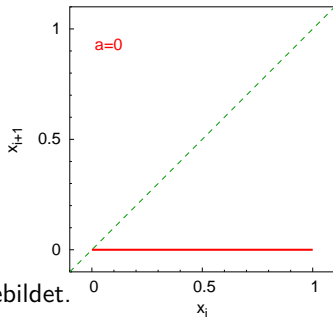
$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - a x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei  $a = 0$ : das ganze Intervall wird in einem Schritt in den Fixpunkt  $x = 0$  abgebildet.





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - a x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

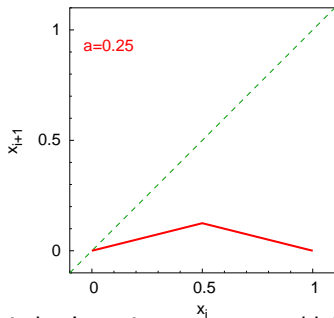
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei  $a < 1$ :  $\lambda < 0$

Abbildung ist überall **kontrahierend**:

Abstände zwischen den Punkten werden mit jeder Iteration um den Faktor  $a$  kleiner.

Attraktor: Fixpunkt bei  $x = 0$ . **Kein Chaos.**





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} a x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - a x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

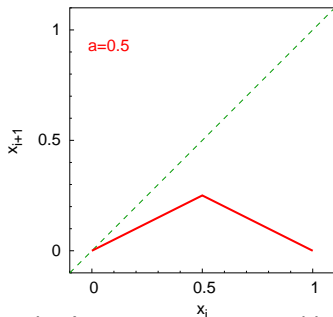
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei  $a < 1$ :  $\lambda < 0$

Abbildung ist überall **kontrahierend**:

Abstände zwischen den Punkten werden mit jeder Iteration um den Faktor  $a$  kleiner.

Attraktor: Fixpunkt bei  $x = 0$ . **Kein Chaos.**





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

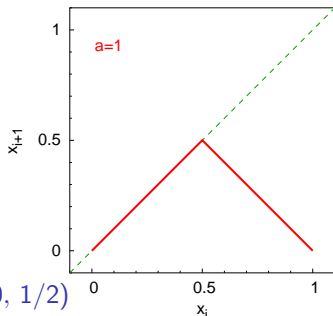
Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} ax_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - ax_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$



Bei  $a = 1$ :  $\lambda = 0$

Abbildung lässt jeden Punkt im Abschnitt  $[0, 1/2]$  an der Stelle. Abstände zwischen den Punkten aus diesem Abschnitt bleiben konstant. Kontinuum von (neutral stabilen) Fixpunkten. **Kein Chaos.**



Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} ax_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - ax_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

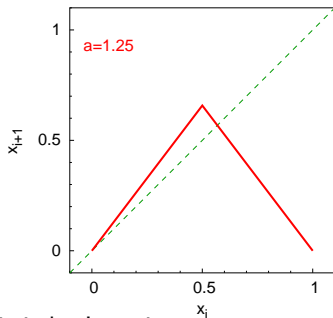
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei  $1 < a \leq 2$ :  $\lambda > 0$ .

Abbildung ist überall **expandierend**:

Abstände zwischen den Punkten wachsen mit jeder Iteration um den Faktor  $a$ .

Attraktor: das ganze Intervall  $[0, a/2)$  wird zum **chaotischen** Attraktor.





Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Versuch: stückweise-stetige **Zelt-Abbildung** vom Intervall  $[0, 1]$ :

$$x_{i+1} = \begin{cases} ax_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - ax_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

mit  $a \geq 0$ .

Lyapunov-Exponent:

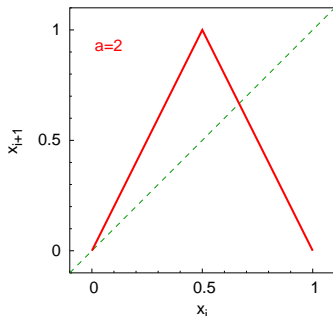
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(a)$$

Bei  $1 < a \leq 2$ :  $\lambda > 0$ .

Abbildung ist überall **expandierend**:

Abstände zwischen den *nahen* Punkten verdoppeln sich mit jeder Iteration.

**Chaotischer Attraktor**: das ganze Intervall  $[0, 1]$ .







Wie entsteht bei einer Parameter-Änderung in einem dynamischen System Chaos aus der Ordnung (z.B. aus periodischer Dynamik)?

Woher kommt die **unendliche** Anzahl von instabilen periodischen Lösungen?

Beispiel: parameter-abhängige Abbildung  $x_{i+1} = f(x_i) = \begin{cases} a, x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ a - a x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$

---

Wir haben tatsächlich gesehen, dass der Attraktor dieser Abbildung sich bei Änderung von  $a$

aus dem stabilen Fixpunkt (periodische Lösung für ein System mit kontinuierlicher Zeit) in den chaotischen Attraktor verwandelte.

Aber es war sehr abrupt: beim beliebig kleinen Überschreiten von  $a = 1$ .

Auch die Herkunft der **unendlichen** Anzahl von instabilen periodischen Lösungen wurde nicht geklärt.

Um den Übergang besser aufzulösen, brauchen wir eine Abbildung, wo die |Steigung| von  $f(x)$  nicht überall dieselbe ist: wo es zugleich kontrahierende **und** expandierende Abschnitte gibt.

Dafür müssen wir etwas zurück...



# Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang

## Rückkehrabbildung (Poincaré)

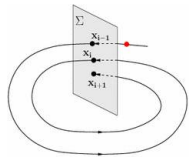


Abbildung überführt in sich die Koordinaten auf einer  $(N-1)$ -dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve) im System mit kontinuierlicher Zeit liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Poincaré-Abbildung am Fixpunkt, der der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen die  $(N-1) \times (N-1)$  Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

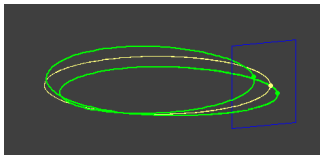


Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**, falls für alle Eigenwerte  $\lambda$  der Jacobi-Matrix am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt:  $|\lambda| < 1$ .

Sei  $-1$  Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Die Störung, die auf dem entsprechenden Eigenvektor liegt, ändert ihr Vorzeichen nach einem Umlauf im Phasenraum.

Nach dem zweiten Umlauf, ändert sich das Vorzeichen wieder:  
 $\Rightarrow$  ursprüngliche Störung wird wiederhergestellt.



So entsteht im Phasenraum eine Trajektorie, die sich nach **zwei** Runden schließt und eine **verdoppelte** Periodendauer hat.

Die ursprüngliche periodische Lösung besteht weiterhin, wird aber **instabil**.



## Logistische Abbildung

( in Anlehnung an die Populationsdynamik )

Evolutionsregel mit diskreter Zeit:  $z_{n+1} = a z_n - b z_n^2$ ;

nach Umskalierung  $z = \frac{a}{b} x$

bleibt nur ein Parameter:

$$x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

Intervall  $(0, 1)$  wird bei  $0 \leq a \leq 4$  in sich selbst abgebildet.

Fixpunkte:  $x = 0$  und  $x = 1 - 1/a$ .

Multiplikator

$$f'(x) = a(1-2x): \quad \lambda = a \quad \text{bzw.} \quad \lambda = 2 - a.$$

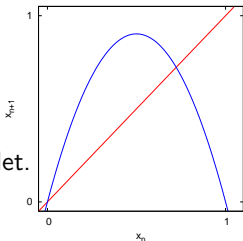
Stabil bei :  $a < 1$  bzw.  $1 < a < 3$ .

Bei  $a = 3$ : Periodenverdopplung (Period:  $1 \rightarrow 2$ ).

Attraktor: Sequenz  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$

Bei  $a = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ : zweite Periodenverdopplung (Period:  $2 \rightarrow 4$ ).

Attraktor: Sequenz  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \dots$





## Logistische Abbildung

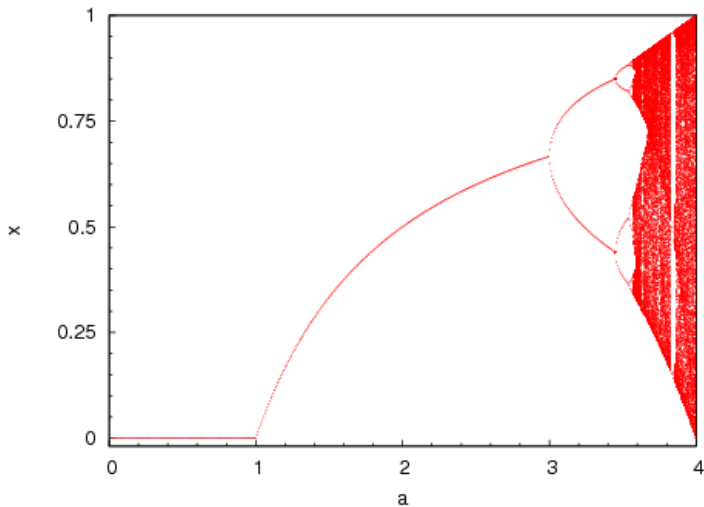
$$x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

### Berechnungsvorschrift für das Bifurkationsdiagramm

0. man nimmt den Anfangswert von  $a$  und wählt  $x_0$  ( $0 < x_0 < 1$ ) aus.
1. Die Abbildung wird  $10^4$  mal iteriert,  
ohne graphische Darstellung von Ergebnissen:  
die *Transiente* wird nicht angezeigt.
2. Die darauffolgenden  $10^3$  Iterationen von  $x_n$  werden geplottet.
3. Wert von  $a$  wird vergrößert:  $a \rightarrow a + \varepsilon$ .  
Übergang zum Schritt 1.

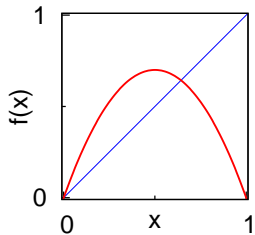


## Bifurkationsdiagramm

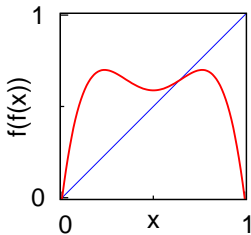




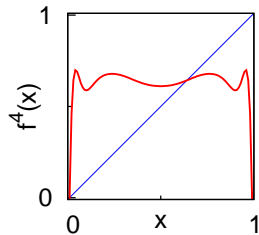
$a=2.8$



1. Rückkehr



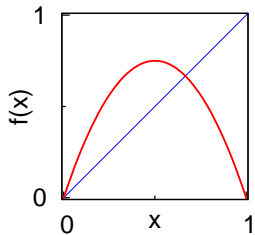
2. Rückkehr



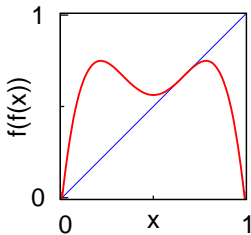
4. Rückkehr



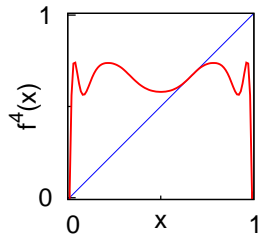
$a=3.0$



1. Rückkehr



2. Rückkehr

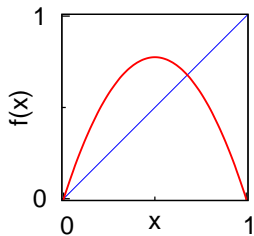


4. Rückkehr

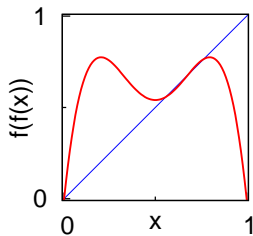




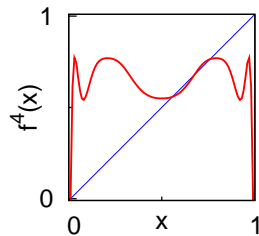
$a=3.1$



1. Rückkehr



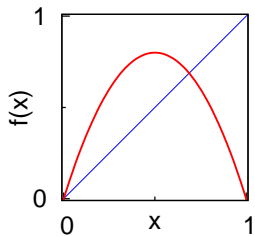
2. Rückkehr



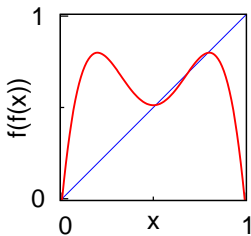
4. Rückkehr



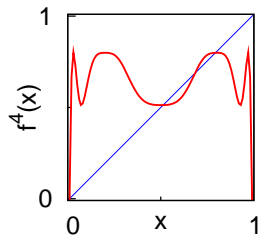
$a=3.2$



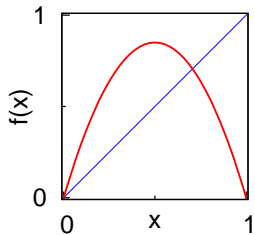
1. Rückkehr



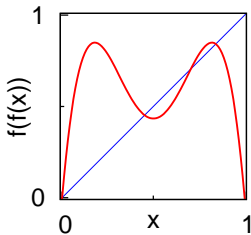
2. Rückkehr



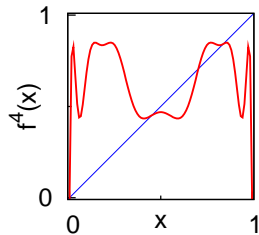
4. Rückkehr

 $a=3.4$ 

1. Rückkehr



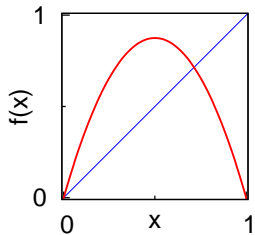
2. Rückkehr



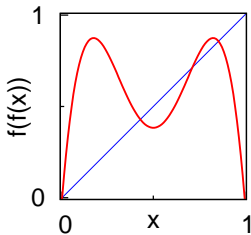
4. Rückkehr



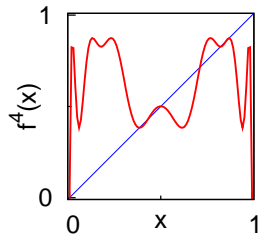
$a=3.5$



1. Rückkehr



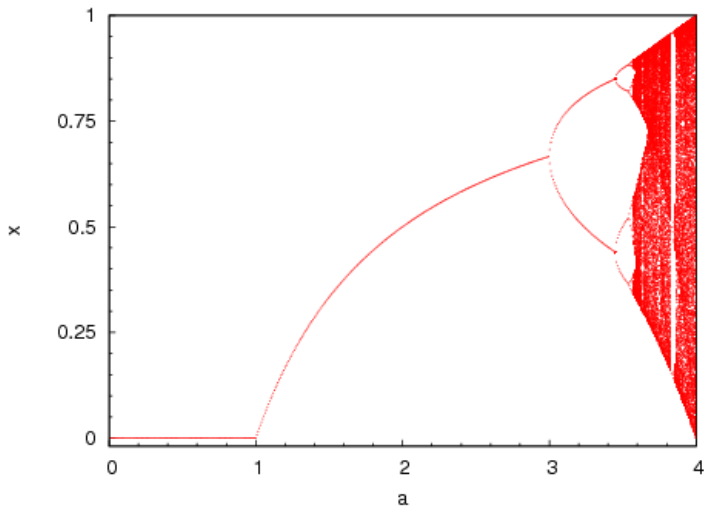
2. Rückkehr



4. Rückkehr

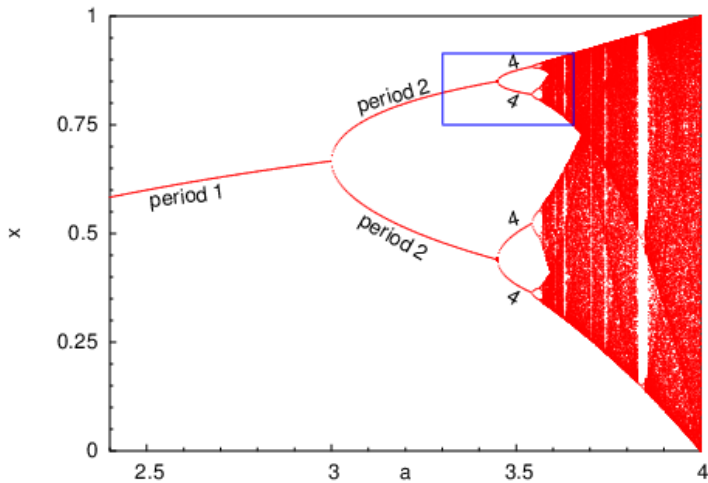


# Bifurkationsdiagramm



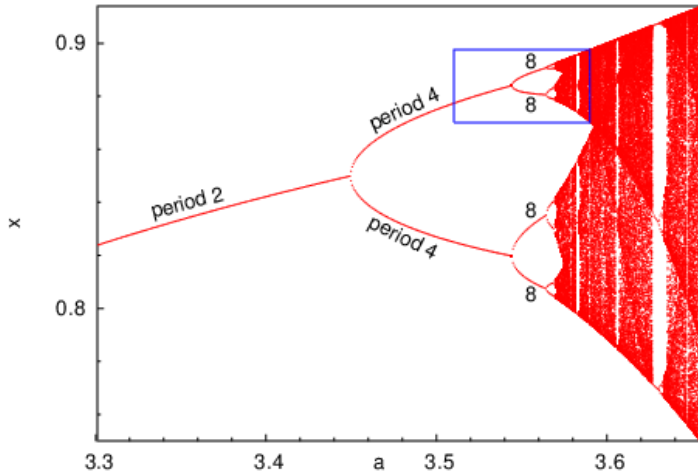


# Bifurkationsdiagramm



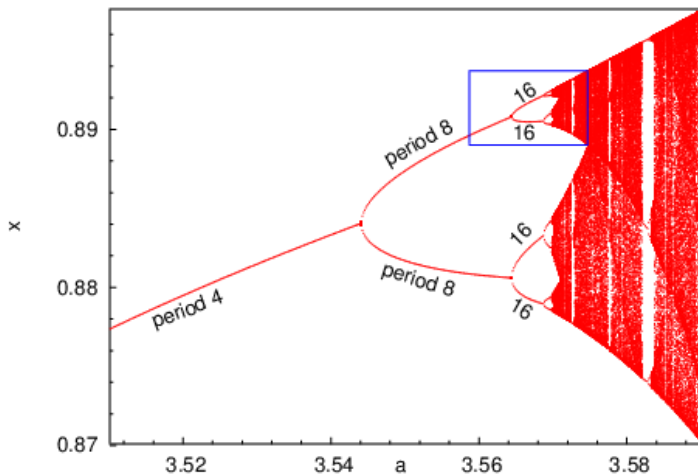


# Bifurkationsdiagramm





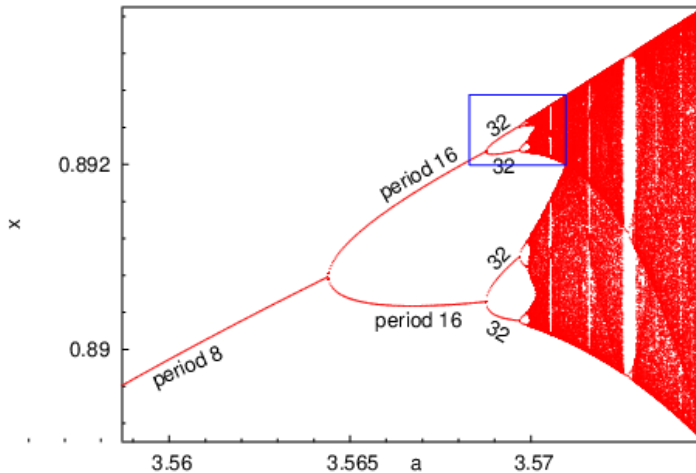
## Bifurkationsdiagramm





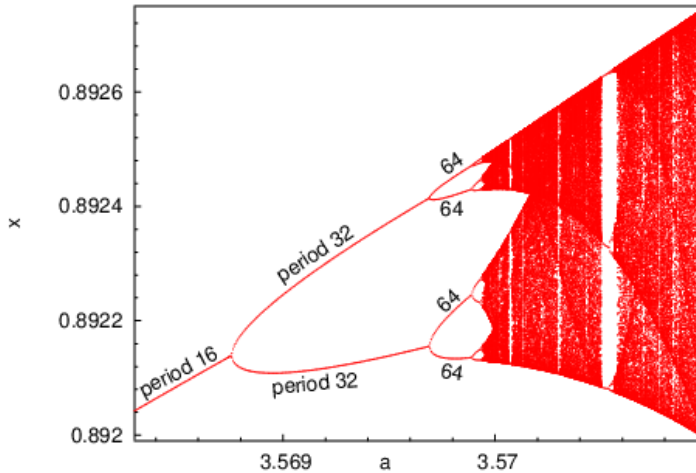


# Bifurkationsdiagramm





# Bifurkationsdiagramm





## Metrische Eigenschaften von der Periodenverdopplungssequenz bei der logistischen Abbildung

- ▷ Wir bilden eine Zahlenfolge  $\{a_n\}$  aus Bifurkationswerten von  $a$ :  
 $a_n$  markiert den Stabilitätsverlust von der Lösung mit Periode  $2^n$   
und die Geburt von der Lösung mit Periode  $2^{n+1}$ .
- ▷  $a_0=3$  und  $a_1=1+\sqrt{6} \approx 3.449$  berechnet man explizit, die sonstigen  
kriegt man mit Numerik. Die Folge  $\{a_n\}$  konvergiert schnell;  
bei  $a > a_\infty=3.5699456\dots$  entsteht zum ersten mal Chaos.
- ▷ Bei  $a = a_\infty$  :  $\forall n \exists$  ein instabiler periodischer Orbit mit Periode  $2^n$ .
- ▷ Nächstes Objekt: Inkremente  $\Delta_n = (a_{n+1} - a_n)$   
und Quotienten  $\delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$ .
- ▷ Numerik ergibt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.669201\dots$   
 $\implies$  Die Folge  $\{a_n\}$  konvergiert asymptotisch exponentiell.



## Qualitative Universalität vom Periodenverdopplungsszenario

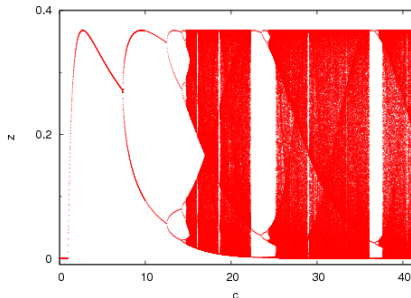
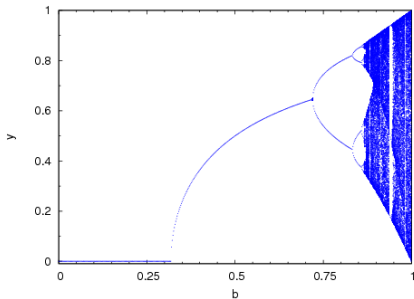
Andere Familien von **unimodalen** Abbildungen eines Intervalls:

z.B.

$$y_{n+1} = b \sin(\pi y_n)$$

oder

$$z_{n+1} = c z_n \exp(-c z_n) .$$





## Quantitative Universalität vom Periodenverdopplungsszenario

Andere Familien von **unimodalen** Abbildungen eines Intervalls:

z.B.  $y_{n+1} = b \sin(\pi y_n)$   
oder  $z_{n+1} = c z_n \exp(-c z_n)$  .

zeigen dieselbe Sequenz von Periodenverdopplungen,  
aber die Inkremente  $\Delta_n$ , ändern sich (*natürlich!*).

Die **Konvergenzgeschwindigkeit** ist jedoch dieselbe:  
bei allen solchen Familien  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \equiv \delta_F = 4.669201 \dots$

Diese **Universalität** wurde vom Mitchell Feigenbaum  
entdeckt und erklärt.

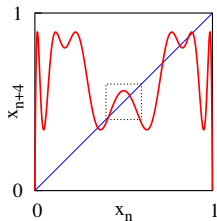
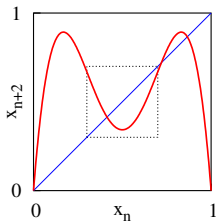
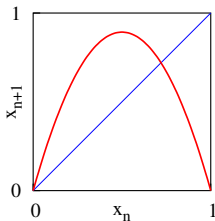


Grund: **Skaleninvarianz**.

Bestätigt in Familien von gewöhnlichen und partiellen DGL.,  
Experimente: Lasers, Elektrochemie, Hydrodynamik, Magnetismus. . .



## Skaleninvarianz



Renormierungsformalismus (*renormalization group*)

Mitte von jedem Bild sieht aus wie das *umgeklappte* vorheriges Bild.

Transformation im Funktionenraum (nach Verschiebung:  $x \rightarrow x - 1/2$ )

Verdopplungsoperator  $T$ :

$$f_{j+1}(x) = T f_j(x) = \alpha f_j \left( f_j \left( \frac{x}{\alpha} \right) \right) \quad \text{mit } \alpha < 0$$

Funktionsraum: glatte Funktionen mit dem *quadratischen* Extremum.



## Skaleninvarianz

Verdopplungsoperator  $T$ :  $f_{j+1}(x) = T f_j(x) = \alpha f_j \left( f_j \left( \frac{x}{\alpha} \right) \right)$

- ▷ Sei  $x = \bar{x}$  ein periodischer Punkt von  $f(x)$  mit Periode  $2p$ :

$$f^{2p}(\bar{x}) = \underbrace{f(f(f \dots f(x) \dots))}_{2p} = \bar{x},$$

dann ist  $x = \alpha \bar{x}$  ein periodischer Punkt von  $Tf(x)$  mit Periode  $p$ :

$$(Tf)^p(\alpha \bar{x}) = \left( \alpha f f \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right)^p (\alpha \bar{x}) = \alpha f^{2p}(\bar{x}) = \alpha \bar{x}$$

Multiplikator dieser periodischen Lösung bleibt konstant unter  $T$ :

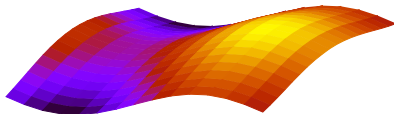
$$\text{(Kettenregel)} \quad \frac{d^p}{dx^p} (Tf)^p(\alpha \bar{x}) = \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} f^{2p}(\bar{x})$$

- ⇒ Operator überführt eine Funktion am krit. Parameterwert  $2p \rightarrow 4p$   
in eine andere Funktion am krit. Parameterwert  $p \rightarrow 2p$ .



## Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem p.O. von Periode 1  
und mit Multiplikator  $-1$   
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:  
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit)  $M_1$  der **Kodimension 1**.



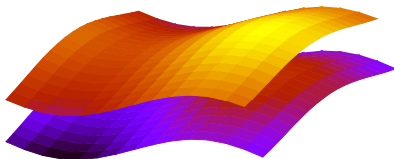
Eine ähnliche Mannigfaltigkeit  $M_p$  der Kodimension 1  
entspricht jeder Periodenverdopplungsbifurkation  $p \rightarrow 2p$ .





## Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem p.O. von Periode 1  
und mit Multiplikator  $-1$   
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:  
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit)  $M_1$  der **Kodimension 1**.

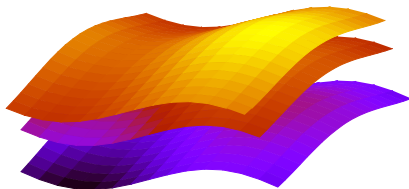


Eine ähnliche Mannigfaltigkeit  $M_p$  der Kodimension 1  
entspricht jeder Periodenverdopplungsbifurkation  $p \rightarrow 2p$ .



## Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem p.O. von Periode 1  
und mit Multiplikator  $-1$   
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:  
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit)  $M_1$  der **Kodimension 1**.



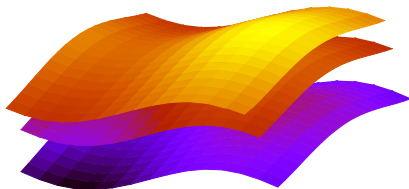
Eine ähnliche Mannigfaltigkeit  $M_p$  der Kodimension 1  
entspricht jeder Periodenverdopplungsbifurkation  $p \rightarrow 2p$ .

Diese Flächen bilden zusammen eine konvergierende Familie  $\{M_p\}$ ;  
die Grenzfläche  $M_\infty$  entspricht dem Übergang ins Chaos  
und der Existenz von instabilen Orbits m.P.  $2^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$ .



## Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem p.O. von Periode 1  
und mit Multiplikator  $-1$   
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:  
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit)  $M_1$  der **Kodimension 1**.



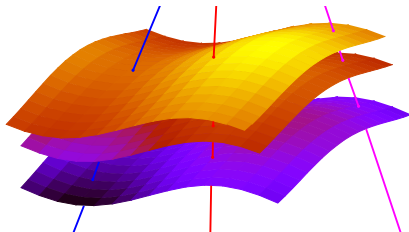
Verdopplungsoperator  $T$  überführt jede Fläche  $M_{2^p}$  in die  $M_p$ .  
Die Grenzfläche  $M_\infty$  ist  $T$ -invariant.

Parameterabhängige Familien von Abbildungen,  
wie  $f(x) = ax(1-x)$ ,  $f(x) = b \sin(\pi x)$  usw.,  
bilden in diesem Raum eindimensionale Kurven,



## Skaleninvarianz

Gesamtheit aller Funktionen mit einem p.O. von Periode 1  
und mit Multiplikator  $-1$   
bildet im Raum **aller** Funktionen eine Untermenge:  
eine Oberfläche (Mannigfaltigkeit)  $M_1$  der **Kodimension 1**.



Verdopplungsoperator  $T$  überführt jede Fläche  $M_{2p}$  in die  $M_p$ .  
Die Grenzfläche  $M_\infty$  ist  $T$ -invariant.

Parameterabhängige Familien von Abbildungen,  
wie  $f(x) = ax(1-x)$ ,  $f(x) = b \sin(\pi x)$  usw.,  
bilden in diesem Raum eindimensionale Kurven,



## Skaleninvarianz

Fixpunkt des Operators  $T$ : Funktion  $g(x)$  mit

$$Tg(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = \alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$$

Im Funktionenraum liegt der Fixpunkt  $g(x)$  an der Fläche  $M_\infty$ .

Numerische Lösung der Funktionsgleichung ergibt

$$g(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 + 0.0267057x^6 + \dots$$

mit  $\alpha = -2.5029875\dots \Rightarrow$  Selbstähnlichkeit im  $x$ -Raum.

Stabilitätsanalyse vom Fixpunkt  $g(x)$ :

Alle Eigenwerte von der Linearisierung von  $T$  an  $g(x)$ ,  
bis auf einen, liegen im inneren des Einheitskreises.

Der einzige Eigenwert,  
der der instabilen Richtung im Funktionenraum entspricht,  
ist  $4.669201\dots = \delta_F \Rightarrow$  Selbstähnlichkeit im Parameterraum.