

Vorlesung 3.

Ein- und zweidimensionale Dynamik





Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Phasenraum: Linie (offen oder geschlossen, z.B. ein Kreis).

Beispiele: $\dot{x} = x^2 - 3x + 4,$ $\dot{x} = 1 + \cos x.$

Parameterabhängig: $\dot{x} = x^2 - 3\mu_1 x + 4\mu_2^2,$ $\dot{x} = \mu + \cos x.$

- ▷ *Formell ist die Gleichung integrierbar:* $t = \int \frac{dx}{f(x)},$
aber wir haben andere Interessen.
- ▷ *Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.*



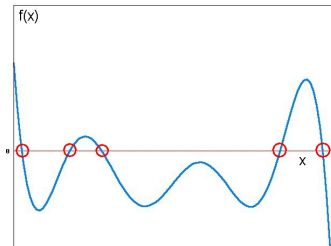
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

- ▷ Nullstellen dieser **stetigen** Funktion sind Ruhelagen (Gleichgewichte) des dynamischen Systems.

- ▷ Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.

Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.





Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

- ▶ Nullstellen dieser **stetigen** Funktion sind Ruhelagen (Gleichgewichte) des dynamischen Systems.

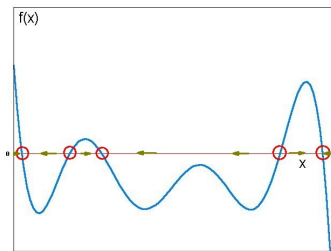
- ▶ Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.

Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x > 0$ sind instabil.

Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x < 0$ sind asymptotisch stabil.

- ▶ „Eindimensionale Jacobi-Matrix“: Wert von $\partial f / \partial x$ an der Nullstelle.





Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

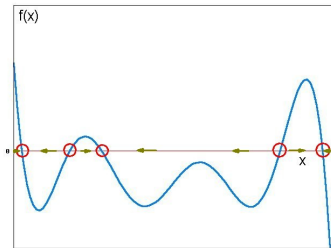
- ▶ Nullstellen dieser **stetigen** Funktion sind Ruhelagen (Gleichgewichte) des dynamischen Systems.

- ▶ Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.

Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

- ▶ Entlang des Graphs der Kurve $f(x)$ wechseln sich die Maxima mit den Minima, daher wechseln sich die Nullstellen mit $\partial f / \partial x > 0$ mit den Nullstellen mit $\partial f / \partial x < 0$ ab.

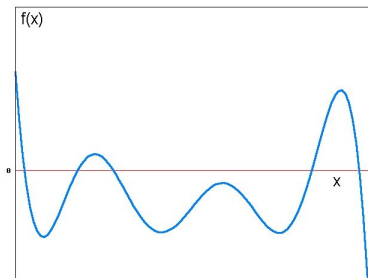
⇒ **instabile** Gleichgewichte wechseln sich mit den **stabilen** ab.





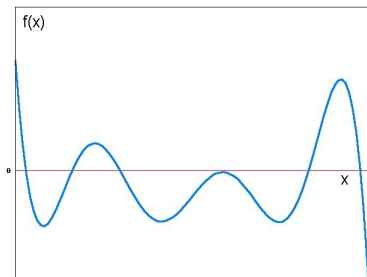
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

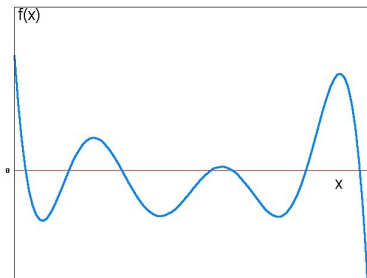
- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



▷

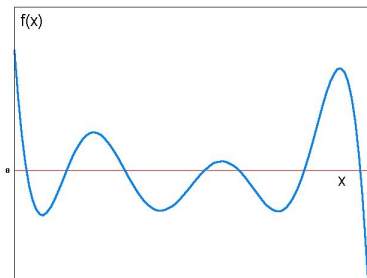
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



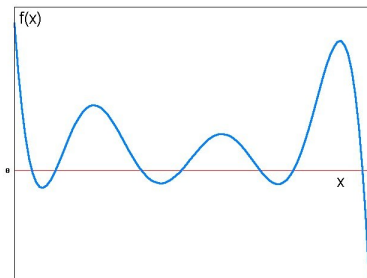
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



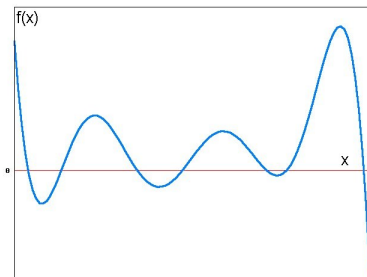
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



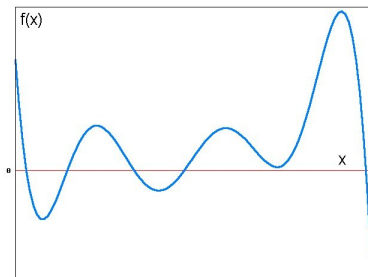
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



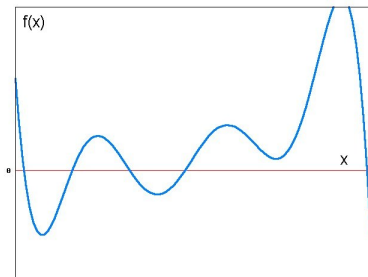
Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

- ▷ Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- ▷ Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



▷



Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Beobachtungen:

- ▶ Bei Variation eines Parameters **entstehen** die Gleichgewichte **paarweise** und **verschwinden** ebenso **paarweise**:
jedesmal wenn ein Maximum oder Minimum von $f(x, \mu)$
Vorzeichen wechselt.
- ▶ Jedes neugeborene/verschwindende Paar besteht
aus je **einem stabilen** und **einem instabilen** Gleichgewicht.
- ▶ Beim kritischen Parameterwert ist das System **strukturell instabil**:
eine beliebig kleine Änderung von μ
ändert das Phasenportrait **qualitativ**.
Solche Ereignisse werden **Bifurkationen** genannt.



Bifurkation (Verzweigung) –
eine qualitative Änderung der Struktur des Phasenraums,
verursacht durch die Variation des **Parameters**
(oder mehrerer Parameter).

Man spricht von lokalen und globalen Bifurkationen.

- ▷ Die **lokalen Bifurkationen** verändern qualitativ die Eigenschaften (Stabilität, Existenz) von einzelnen Objekten im Phasenraum: Fixpunkten, geschlossenen Bahnkurven usw.
- ▷ Die **globalen Bifurkationen** verändern die ganzen (invarianten) Mengen im Phasenraum: sie entstehen/verschwinden, kollidieren miteinander.
- ▷ Im Moment einer Bifurkation (bei **kritischem** Parameterwert) wird das System **strukturell instabil**.

Der Begriff einer Bifurkation wurde von Henri Poincaré eingeführt.





$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

Mögliche qualitative Änderungen bei eindimensionalen Systemen:

(a) Ein Paar von Gleichgewichten entsteht/verschwindet.

⇒ ein Maximum oder Minimum von $f(x, \mu)$ wechselt Vorzeichen.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x, \mu) |_{x=x_*} = 0$$

(b) Ein Gleichgewicht wechselt seine Stabilität.

⇒ Ableitung $\frac{d}{dx} f(x, \mu) |_{x=x_*}$ wechselt Vorzeichen.

⇒ siehe Fall (a) oben.

▷ Am Bifurkationsparameterwert $\bar{\mu}$ sind zwei Bedingungen erfüllt:

(1) $f(x_*, \bar{\mu}) = 0$ (Gleichgewicht)

(2) $\frac{d}{dx} f(x, \mu) |_{x=x_*, \mu=\bar{\mu}} = 0$ (Ableitung verschwindet).

Zwei Gleichungen, zwei unbekanntes (x_* , $\bar{\mu}$) – prinzipiell lösbar!



$$\dot{x} = f(x, a)$$

$$f(x, a) = x^3 - ax^2 - 2x + 6$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2ax - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 2ax - 2 = 0 \end{cases}$$

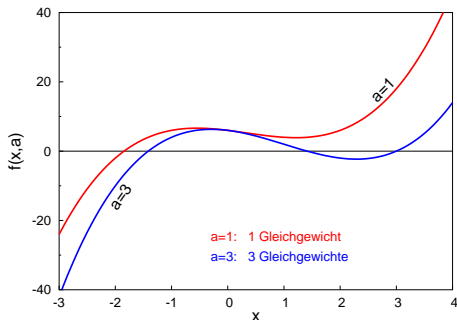
▷ x loswerden: \Rightarrow *Resultante*

Resultante ist ein Werkzeug der Algebra, um zwei Polynome auf das Vorhandensein gemeinsamer Nullstellen zu prüfen.

z.B. **Mathematica**: Resultant $[x^3 + ax^2 - 2x + 6, 3x^2 - 2ax - 2, x]$

$$\underline{-24a^3 - 4a^2 - 16a + 940} = -4(2a - 5)(47 + 8a + 3a^2) = 0 \Rightarrow a = 5/2.$$

▷ Bifurkation findet bei $a = \frac{5}{2}$ statt.





Gleichgewichte in der Phasenebene

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \cdot \text{Gleichgewicht } \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f(x_*, y_*) = 0 \\ g(x_*, y_*) = 0 \end{pmatrix}.$$

1. Koordinatenverschiebung: Gleichgewicht \Rightarrow Ursprung.

$$\text{Neue Koordinaten: } \begin{cases} x_1 = x - x_* \\ x_2 = y - y_* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}, \text{ mit } \begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ g(0, 0) = 0 \end{cases}.$$

2. Linearisierung am Gleichgewicht:

$$\text{Taylor-Entwicklung der rechten Seiten } \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial g}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \end{cases}$$

(alle partielle Ableitungen berechnet bei $x_1 = x_2 = 0$)



Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

Eigenwerte λ (und damit die Stabilität **quantitativ**) sind nur von den **Invarianten** der Jacobi-Matrix abhängig: deren Spur und Determinante.

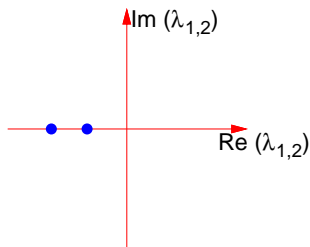
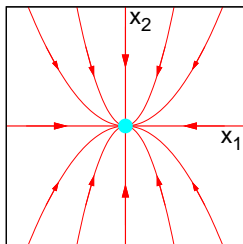
Bei Transformationen von Variablen bleiben die Eigenwerte **invariant!**

Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ λ_1 und λ_2 reell und negativ: **stabiler Knoten** (stable node).

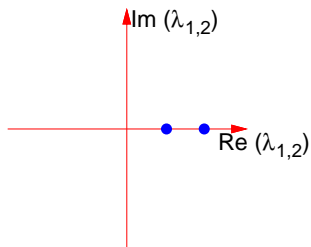
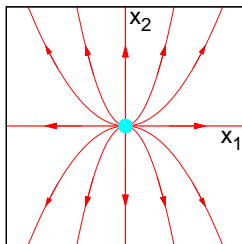


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ λ_1 und λ_2 reell und positiv: **instabiler Knoten** (unstable node).

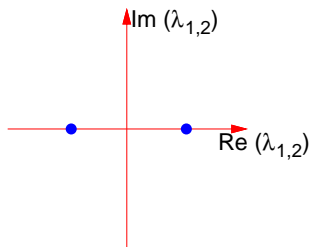
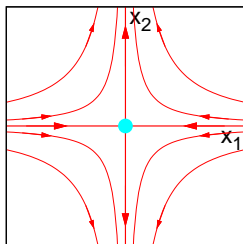


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ λ_1 und λ_2 reell, mit unterschiedlichen Vorzeichen: **Sattel** (saddle).

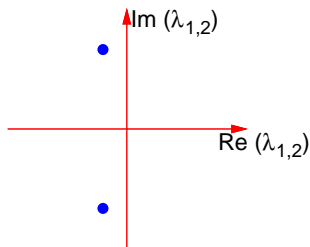
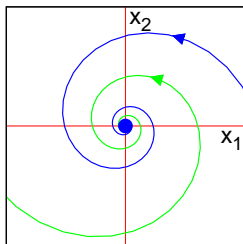


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$: **stabiler Fokus (Strudel)** (stable focus).

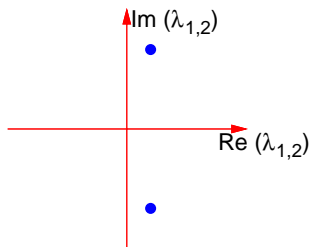
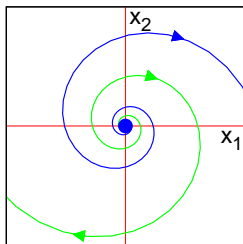


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$: **instabiler Fokus (Strudel)** (unstable focus).

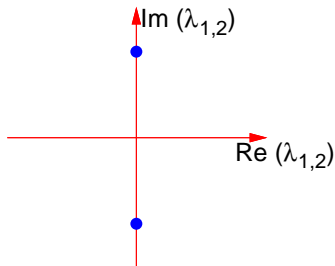
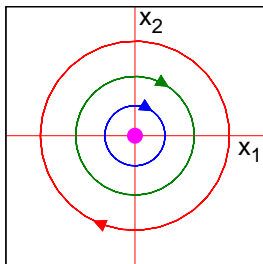


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- ▷ λ_1 und λ_2 rein imaginär: **Zentrumspunkt** (center).





Vieta-Satz und Wurzel der quadratischen Gleichung:

Seien A und B die Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$x^2 + Ax + B = 0$$

und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln), reell oder komplex-konjugiert.

Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -A, \quad x_1 \cdot x_2 = B.$$

Beweis: einfach $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ausmultiplizieren.

Verallgemeinerung

Seien x_1, x_2, \dots, x_n Wurzeln des Polynoms n . Grades

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0.$$

Dann gilt $\sum_{j=1}^n x_j = -a_{n-1}$,

$$\prod_{j=1}^n x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

und noch $n - 2$ ähnliche Relationen.

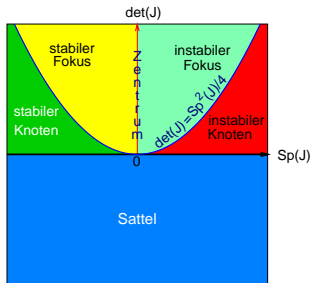


Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$
 $\lambda^2 - \text{Sp}(J)\lambda + \det(J) = 0$

- Unter Berücksichtigung des **Satzes von Vieta** erfolgt die endgültige Zuordnung:





Definition: ein Gleichgewicht heißt **hyperbolisch**, falls für jeden Eigenwert λ_j seiner Jacobi-Matrix gilt: $Re(\lambda_j) \neq 0$.

Satz von Grobman und Hartman

*In einer Umgebung eines hyperbolischen Gleichgewichts existiert eine eindeutige und umkehrbar stetige Abbildung, die die Trajektorien des **nichtlinearen** Systems auf die Trajektorien des **linearisierten** Systems abbildet.*

- ▷ *Diese Abbildung bewahrt die Zeitrichtung und Trajektorienrichtung.*

Damit gibt die Linearisierung Aufschluss über den Aufbau des Phasenportraits in einem nichtlinearen System in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichts.

(gilt bei beliebiger Dimension des Phasenraums).