Vorlesung 14

Einführung in die fraktale Geometrie

Wikipedia: *Die Dimension ist ein Konzept in der Mathematik,*
das im Wesentlichen die Anzahl der Freiheitsgrade
einer Bewegung in einem bestimmten Raum bezeichnet.

Naive Frage: warum sagen wir, dass
eine Linie eindimensional,
eine Fläche zweidimensional und
ein (eingeschlossenes) Volumen dreidimensional sind ?

Naive Antwort: weil man die instantane Lage des Punktes
auf einer Linie durch eine reelle Zahl,
auf einer Fläche durch zwei reelle Zahlen und
in einem Volumen durch drei reelle Zahlen
eindeutig bestimmt.

Konsequenz: Da die *Anzahl der Freiheitsgrade*
(oder die Anzahl reeller Zahlen in einem Satz) eine ganze Zahl ist,
wird dadurch auch die Dimension zwangsweise ganzzählig.

Kann man die Lage im Raum eindeutig auf eine einzige reelle Zahl reduzieren?

Wir betrachten einen Würfel mit Seitenlänge 1 im 3-dimensionalen Raum,
setzen eine deren Ecken in den Ursrpung
und richten die Kanten entlang der x, y, z-Achsen.

Ein Punkt im inneren des Würfels hat Koordinaten

$$0 \le x < 1, \quad 0 \le y < 1, \quad 0 \le z < 1.$$

Dezimale Darstellung: $x{=}0{,}x_1x_2x_3x_4\ldots$, $y{=}0{,}y_1y_2y_3y_4\ldots$, $z{=}0{,}z_1z_2z_3z_4\ldots$.

Wir bilden eine Zahl u mit dezimaler Darstellung $u{=}0{,}u_1u_2u_3\ldots$, $0 \le u_j \le 9$

$$u{=}0{,}x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3x_4y_4z_4\ldots,$$

mit $u_{3k-2} = x_k$, $u_{3k-1} = y_k$, $u_{3k} = z_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Aus dem (einzigen!) Wert von u kann man durch seine dezimale Zerlegung
alle drei ursprüngliche kartesische Koordinaten eindeutig wiederherstellen:

$$x{=}0{,}u_1u_4u_7\ldots u_{3k-2}\ldots,$$
$$y{=}0{,}u_2u_5u_8\ldots u_{3k-1}\ldots,$$
$$z{=}0{,}u_3u_6u_9\ldots u_{3k-2}\ldots \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Damit ist die Anfangsfrage positiv beantwortet,
aber ist es wirklich das, was wir wollen?

Wie lang ist die spanisch-portugiesische Grenze?

Google Maps http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&s...

Wie lang ist die spanisch-portugiesische Grenze?

- Laut der *alten* spanischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der spanisch-portugiesieschen Grenze 987 Kilometer.
- Laut der *alten* portugiesieschen Enzyklopädia, beträgt die Länge der portugiesiesch-spanischen Grenze 1214 Kilometer.

Fläche Spaniens: 504 645km^2; Fläche Portugals 92 090km^2.
92 391km^2.

Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

Google Maps http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&s...

Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

- Laut der belgischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der belgisch-niederlandischen Grenze 380 Kilometer.
- Laut der niederlandischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der belgisch-niederlandische Grenze 449 Kilometer

  Fläche Belgiens: 30 528km^2;
  Fläche von den Niederlanden: 37 354km^2.

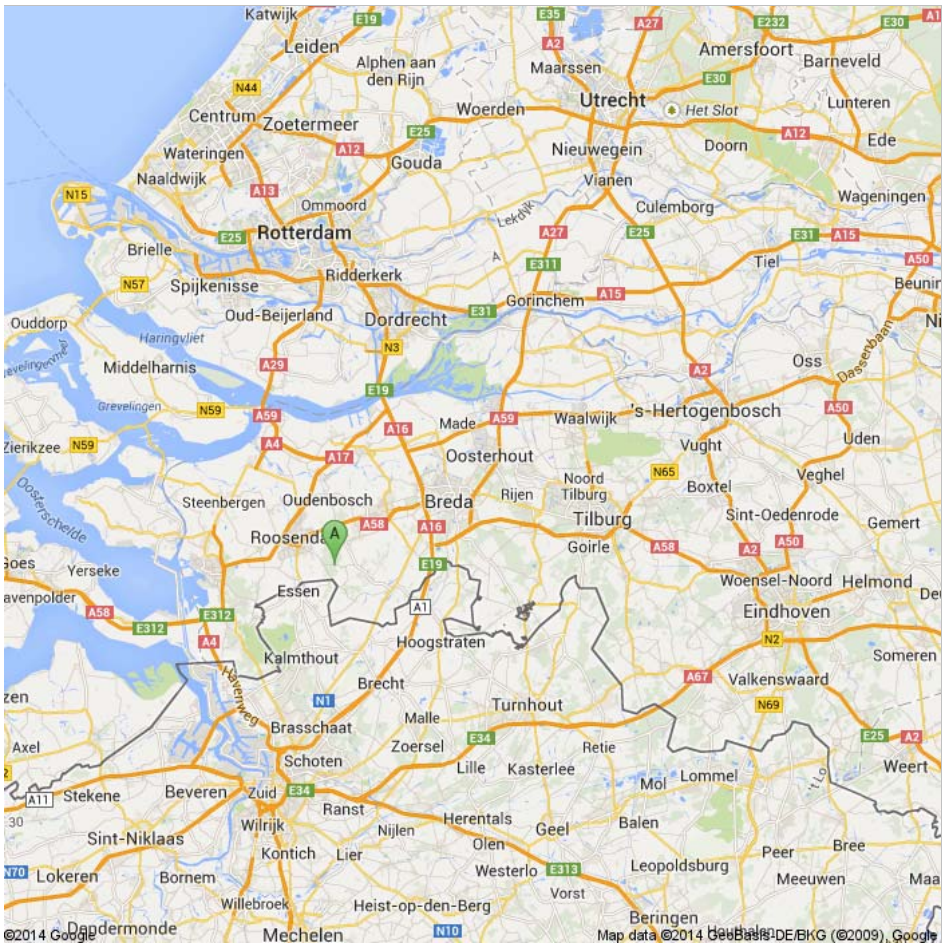
Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

Google Maps http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&s...

Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

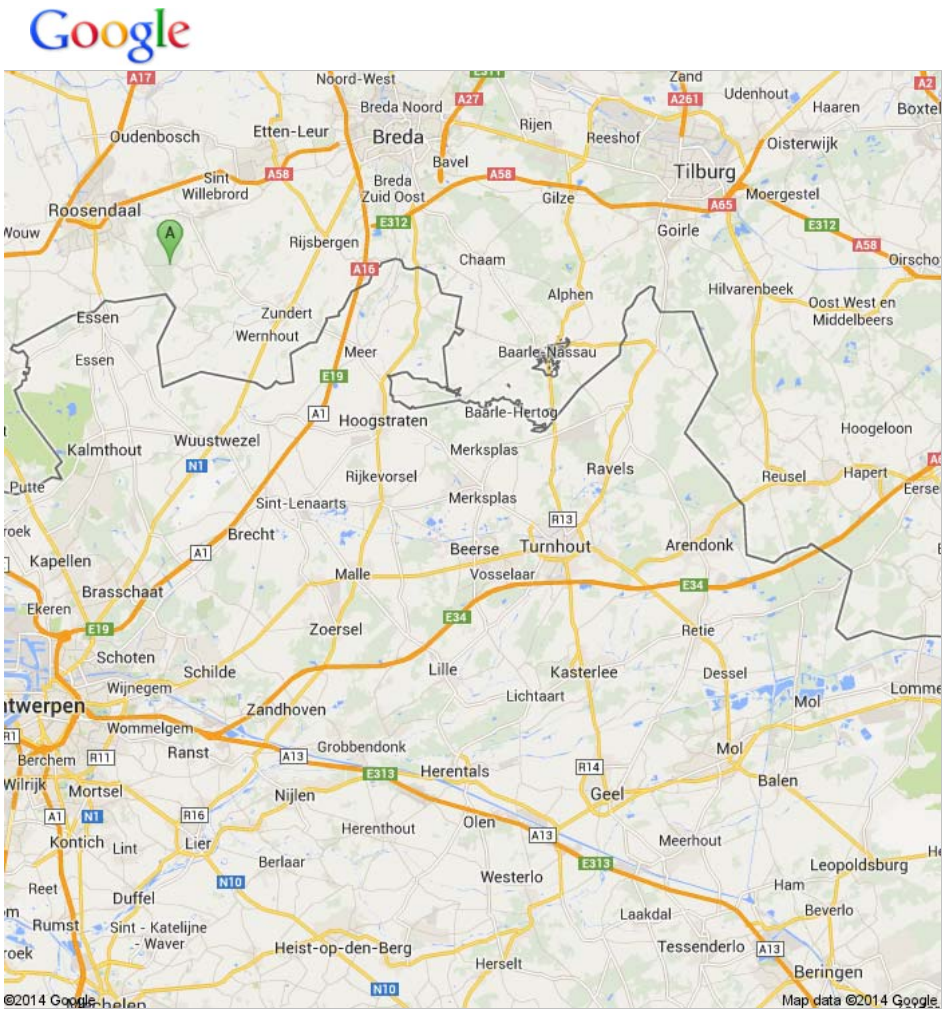
Kurvimeter

Nederheidsebaan - Google Maps https://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=51.489935,4.54...



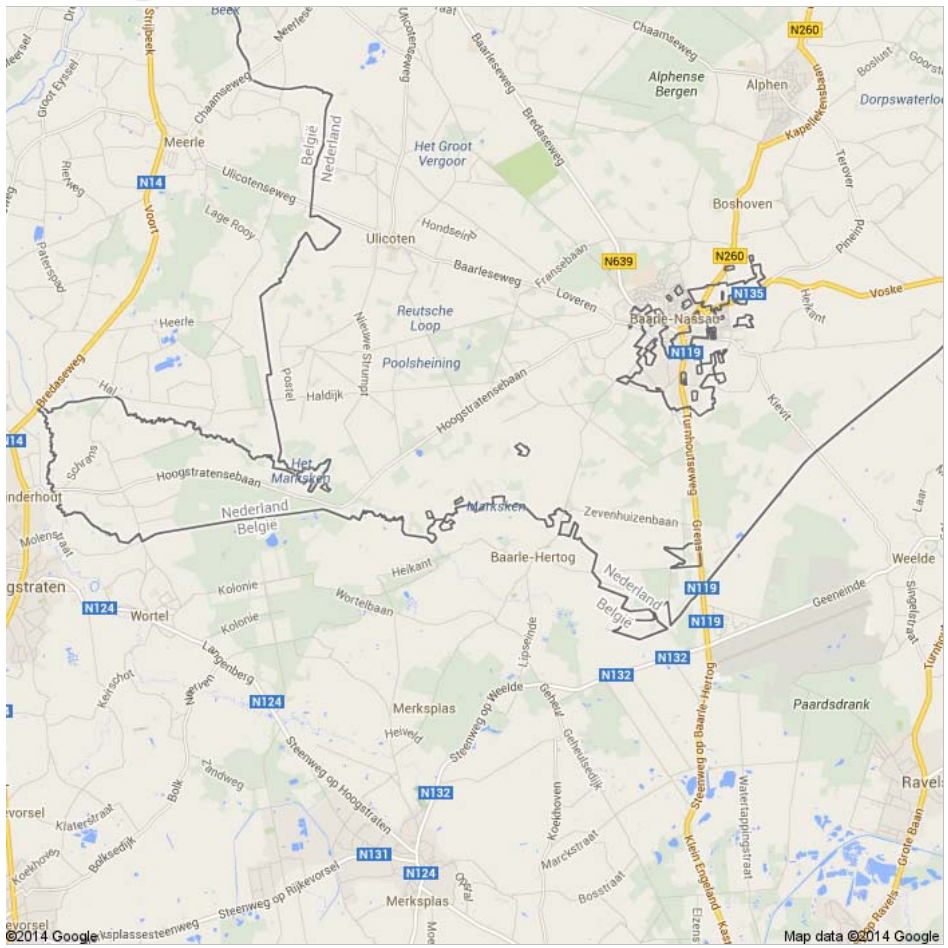
Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

Nederheidsebaan - Google Maps https://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=51.489935,4.54...



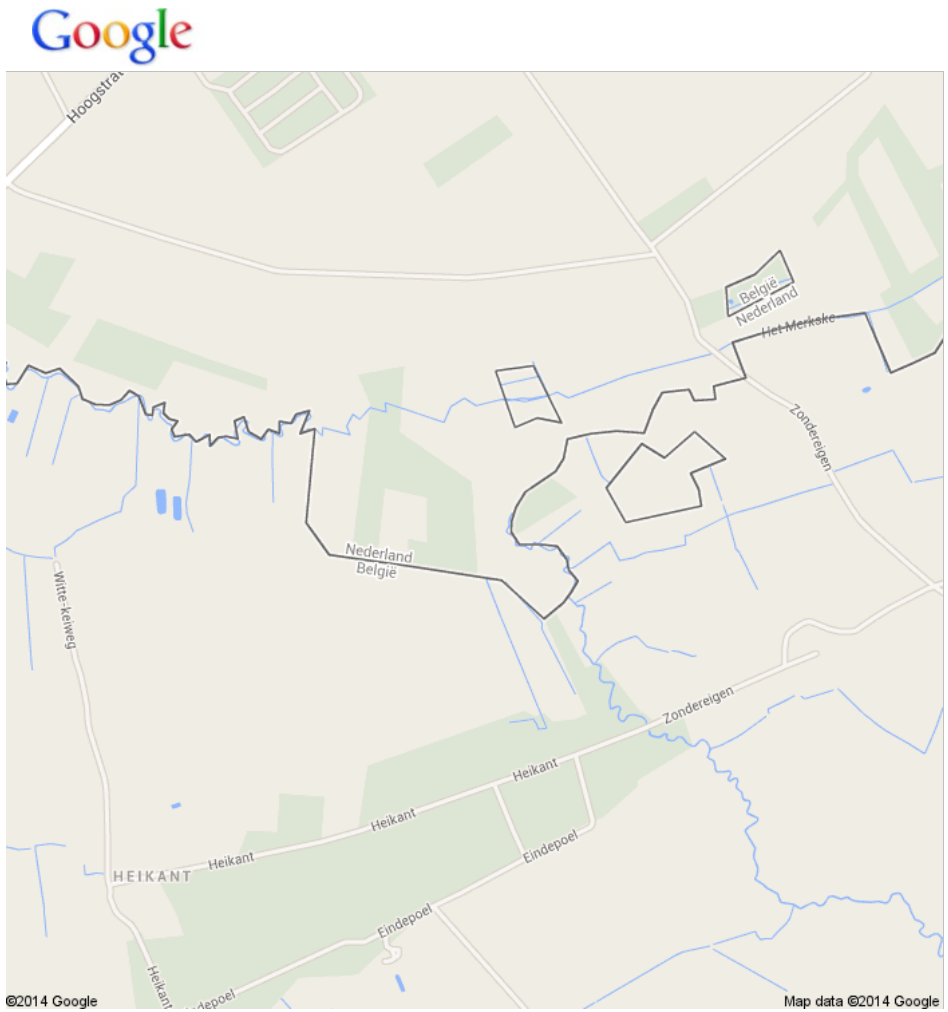
Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

Nederheidsebaan - Google Maps https://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=51.489935,4.54...



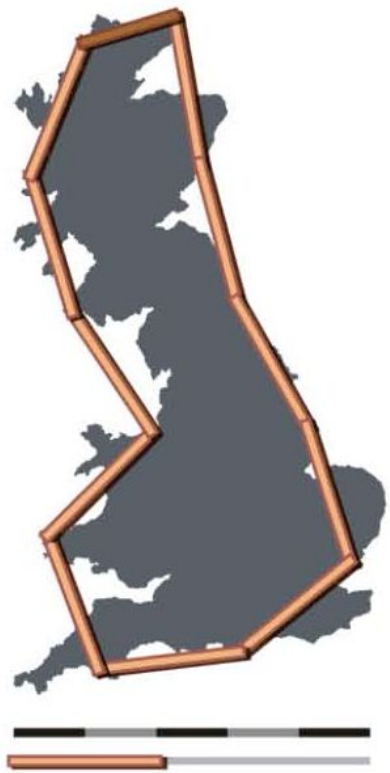
Wie lang ist die belgisch-niederlandische Grenze?

(H)odometer



Wie lang ist die britische Küste?

Google Maps http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&s...



Maßstab=200Km
Länge=2400Km

Maßstab=100Km
Länge=2800Km

Maßstab=50Km
Länge=3400Km

Wie berechnet man eine Dimension:

- Das Messobjekt wird von Kästchen (Quadraten, Quader,...) mit Kantenlänge ε vollständig überdeckt.
  Es werden N Kästchen benötigt.
- Kantenlänge ε wird verkleinert.
  Nun wird eine größere Anzahl von Kästchen gebraucht.
- Falls wir das Kästchen uneingeschränkt verkleinern,
  wird die Kästchenanzahl $N(\varepsilon)$, die für die vollständige Überdeckung nötig ist, uneingeschränkt wachsen. Die Frage: wie schnell ?

  bei einer Kurve ist $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$*; bei einer Fläche ist* $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2} \ldots$
- Der Grenzwert

$$\boxed{D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N)}{\log(1/\varepsilon)} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)}}$$

... ist nicht zwangsweise eine ganze Zahl

und wird fraktale Dimension vom Objekt genannt
(box-counting dimension, Kapazitätsdimension).

Zurück zu den Küsten: wie groß wird D ?

Für unterschiedliche Küsten unterscheiden sich die Schätzwerte betrachtlich.

Großbritanien ergibt 1,3.

Für die sehr glatte südafrikanische Küste kommt praktisch 1 heraus.

Für die norwegische Küstenlinie (Fjorden!): 1,55.

Selbstähnlichkeit (self-similarity) .

Ein kleiner Teil vom Objekt ist (exakt oder annähernd) dem ganzen Objekt ähnlich.

Jede neue Vergrößerung gibt das ursprüngliche Objekt wieder.

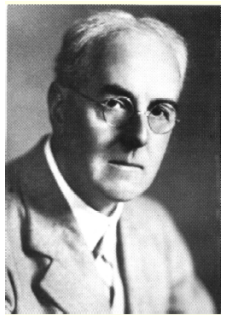
Aber: oft nur bei der passenden Wahl vom Maßstab
(Selbstähnlichkeitskoeffizient)

Exakte Ähnlichkeit: Skaleninvarianz (scale invariance).

Mathematisch kann dieser Prozess unendlich sein.
In der Natur stößt man auf die Grenzen
(spätestens auf der atomaren Skala).

Felix Hausdorff

Abram Besicovitch



Fry Richardson

Benoit Mandelbrot

Hausdorff (-Besicovitch) Dimension

1. Für gegebenes ε wird das Objekt X
   ~~von Kästchen mit Kantenlänge ε vollständig überdeckt.~~
   mit Kugeln vom Radius $r_i \leq \varepsilon$ vollständig überdeckt.
2. Für jedes reelles d wird $S(\varepsilon, d) = \inf \sum_i r_i^d$ bestimmt

   (inf wird über alle mögliche Überdeckungen berechnet).
3. Für genügend kleine d: $\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon, d) = \infty$.
4. Für genügend große d: $\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon, d) = 0$.
5. Den Schnittwert (oder inf von „genügend großen“)
   nennt man $D_H(X)$: Hausdorff-Dimension von X.
6. $$D_H \leq D.$$

Eine Fliege und ein Knäuel Wolle

- Aus der großen Entfernung erscheint der Knäuel der Fliege als kleiner Punkt (topologische Dimension 0).
- Im Laufe vom Anflug wird dieser Punkt zum „großen Punkt“ – zum Disk (topologische Dimension 2).
- Aus der noch näheren Distanz empfindet die Fliege den Knäuel als eine Kugel (topologische Dimension 3).
- Aus der nächsten Nähe sieht die Fliege einen glatten Faden: eine auf besondere Weise gewickelte Raumkurve (topologische Dimension 1).
- Nach der Landung sieht die Fliege auch die Zotten/Flaum, empfindet damit die Fraktalität der Wolle.
- Wie groß ist dann die „echte“ Dimension vom Knäuel?
  Die gibt es nicht:
  alles wird vom Blickpunkt des Beobachters abhängig,
  von der Auflösungsfähigkeit seiner Augen oder des Meßgeräts.

Klassifizierung von Fraktalen

1. Die konstruktiven (aufgebaut durch bestimmte rekursive Verfahren):
2. Die dynamischen (von dynamischen Systemen generiert):
   Julia-Menge, Mandelbrot-Menge, chaotische Attraktoren, ...
3. Die „natürlichen“ (aus der Natur ...)
   Hier wird Selbstähnlihkeitsintervall zwangsweise von unten begrenzt.
   Küstenlinien, Wolken, turbulente Strömungen, Blutgefäße, ...

Konstruktive Fraktale

Cantor-Menge (Cantor-Staub): Georg Cantor, 1883.

Aus dem Intervall von Länge 1 wird das mittlere Drittel (ohne Endpunkte) rausgeworfen.
Dieses Verfahren wird an jedes verbliebene Intervall angewendet, und so *ad infinitum*.

Im *limes* bleibt eine Menge, die

- einerseits, keine Intervalle einschließt und Gesamtlänge 0 besitzt;
- andererseits, ein Kontinuum von Zahlen beinhaltet.
  Tatsächlich: es werden nach und nach Zahlen entfernt, deren ternäre Darstellung $x = 0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \ldots \frac{a_n}{3^n} + \ldots = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$ *mit* $a_j = 0, 1, 2$ *das Symbol 1 beinhaltet. Es bleiben Zahlen mit* $a_j =$ *nur noch 0 oder 2.*
  ... aber alle solche Zahlen (stellen Sie sich $2 \to 1$ vor): ein Kontinuum.

Konstruktive Fraktale

Cantor-Menge (Cantor-Staub): Georg Cantor, 1883.

Aus dem Intervall von Länge 1 wird das mittlere Drittel (ohne Endpunkte) rausgeworfen.
Dieses Verfahren wird an jedes verbliebene Intervall angewendet...

Berechnung der Dimension:

Bej jedem Schritt wird ε um Faktor 3 verkleinert: $\varepsilon_n = 3^{-n}$.

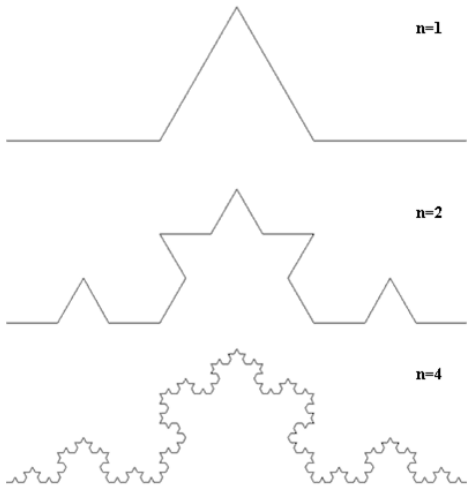
Bej jedem Schritt wird die Kästchenanzahl verdoppelt: $N = 2^n$.

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\ldots$$

▷

Konstruktive Fraktale

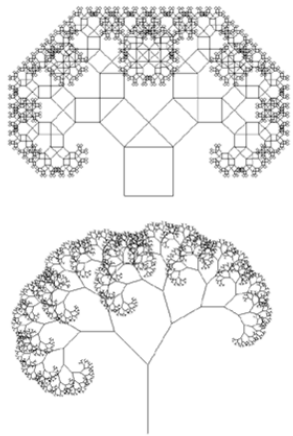
Koch-Kurve



Aus einer Linie wird das mittlere Drittel entfernt
und durch zwei gleiche Abschnitte ersetzt.
Und so weiter, *ad infinitum*.
Es entsteht eine unendlich lange Linie,
die sich selbst nicht schneidet, ist stetig
aber in jedem ihrer Punkte nicht differenzierbar!

Dimension: $D = \dfrac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\ldots$

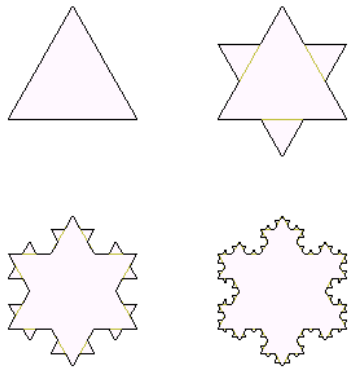
Pythagoras-Baum



Eine Seite eines Quadrates wird, als Hypotenuse,
durch zwei Katheten ersetzt.
An jedem der Katheten wird ein neues Quadrat
aufgebaut. Und so weiter, *ad infinitum*.

Konstruktive Fraktale

Geschlossene Kochskurve wird zur Schneeflocke.
Im Laufe der Iterationen wächst die Grenzlänge uneingeschränkt, obwohl die eingeschlossene Fläche endlich bleibt.



Erste vier Iterationen.

Selbstähnlichkeitskoeffizient: 1/3

Konstruktive Fraktale

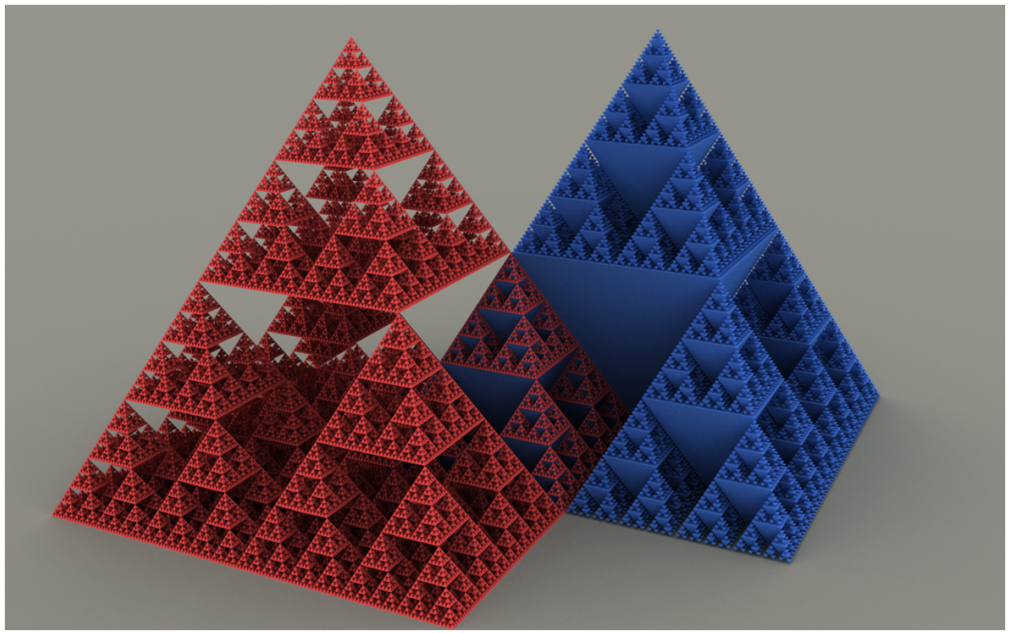
Sierpinski-Dreieck –
zweidimensionales Gegenstück zu der Cantormenge,
von Vaclav Sierpinski in 1913 vorgeschlagen.

Erste vier Schritte.

Selbstähnlichkeitskoeffizient: 1/3

Konstruktive Fraktale

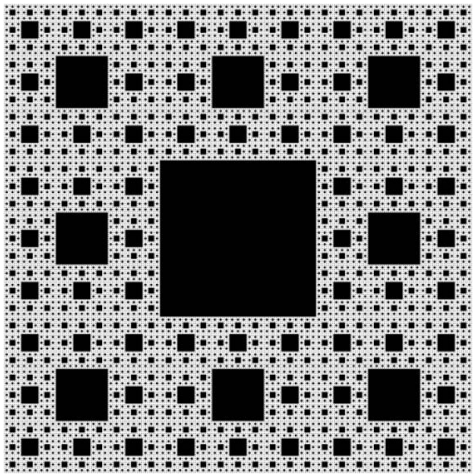
Dreidimensionale Version vom Sierpinski-Dreieck:



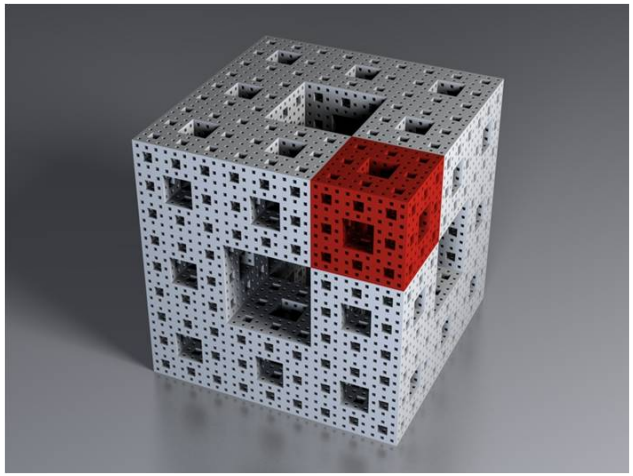
Selbstähnlichkeitskoeffizient: 1/3

Konstruktive Fraktale

Sierpinski-Teppich



(Menger)-Schwamm

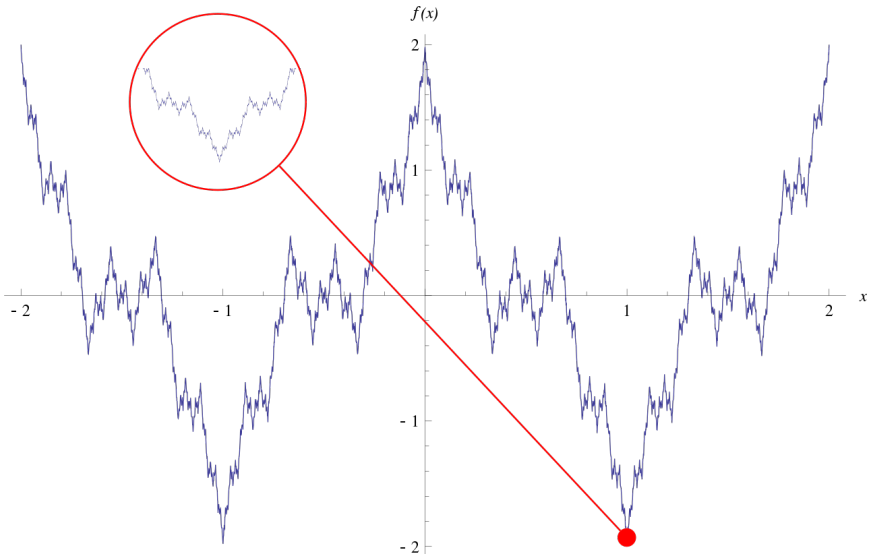


Selbstähnlichkeitskoeffizient: 1/3

Weierstraß-Funktion

Karl Weierstraß (1872): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$

mit $0 < a < 1$, b ganz und ungerade, und $a\,b > 1 + 3\pi/2$:



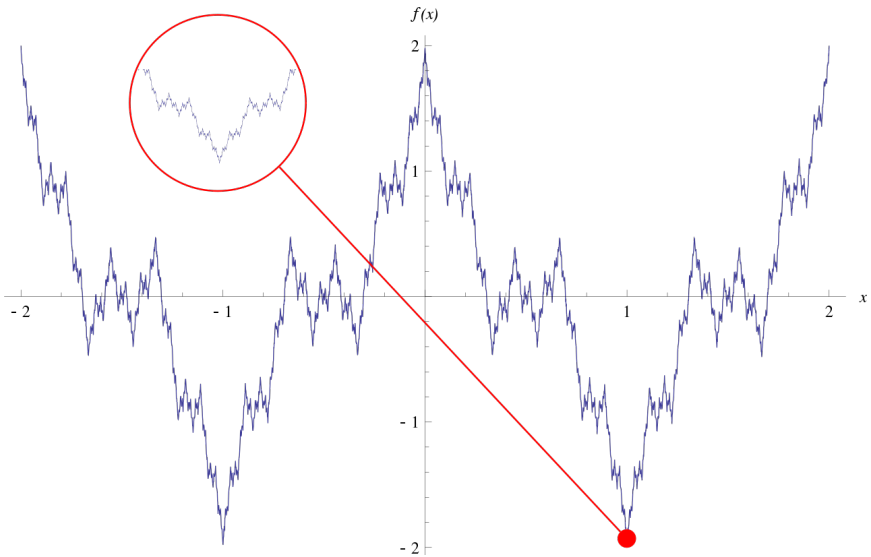
Überall stetig, nirgendwo differenzierbar!

Charles Hermite (1893): *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées*.

Weierstraß-Funktion

Karl Weierstraß (1872): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$

mit $0 < a < 1$, b ganz und ungerade, und $a\,b > 1 + 3\pi/2$:



Überall stetig, nirgendwo differenzierbar!

Charles Hermite (1893): *Mit Furcht und Schrecken wende ich mich ab von diesem beklagenswerten Übel der Funktionen ohne Ableitungen*.

In einem Artikel vom 1926 stellte Lewis Fry Richardson die Frage,
ob der Wind überhaupt eine wohldefinierte Geschwindigkeit besitzt.

§ 1.2. *Does the Wind possess a Velocity ?*

This question, at first sight foolish, improves on acquaintance. A velocity is defined, for example, in Lamb's 'Dynamics' to this effect: Let Δx be the distance in the x direction passed over in a time Δt, then the x-component of velocity is the limit of $\Delta x/\Delta t$ as $\Delta t \to 0$. But for an air particle it is not obvious that $\Delta x/\Delta t$ attains a limit as $\Delta t \to 0$.

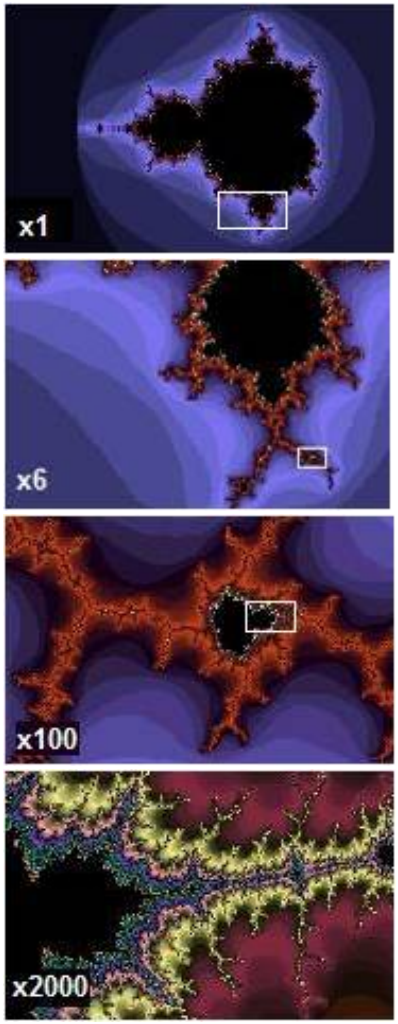
We may really have to describe the position x of an air particle by something rather like Weierstrass's function,

say,

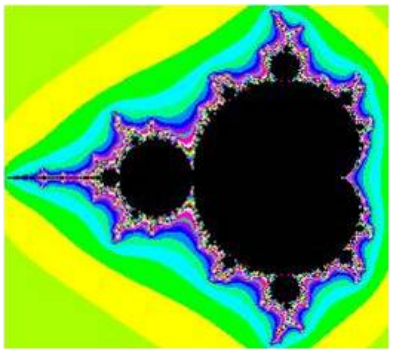
$$x = kt + \sum_n \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(5^n \pi t\right),$$

Er argumentierte, dass die Funktion, die die Lage eines Moleküls im Wind beschreibt, keine Ableitung hat. Deswegen macht es Sinn,
von einer Durchschnittswindgeschwindigkeit zu reden,
kaum aber von einer momentanen Windgeschwindigkeit.

Dynamische Fraktale



Mandelbrot-Menge entsteht
nach der wiederholten Anwendung
einer algebraischen Transformation
(Abbildung) auf der komplexen Ebene.



$$z_{n+1} = z_n^2 + C \qquad (z_0 = 0)$$

Wo liegt $\lim_{n\to\infty} z_n$?

Bei Werten von der komplexen Konstante C
im schwarzen Fleck tendieren die Iterationen gegen Null.
Gesamtheit dieser Punkte bildet die *Mandelbrot-Menge*.
Bei allen anderen Werten von C läuft z_n ins unendliche.
Die Grenzen der Mandelbrot-Menge sind fraktal.

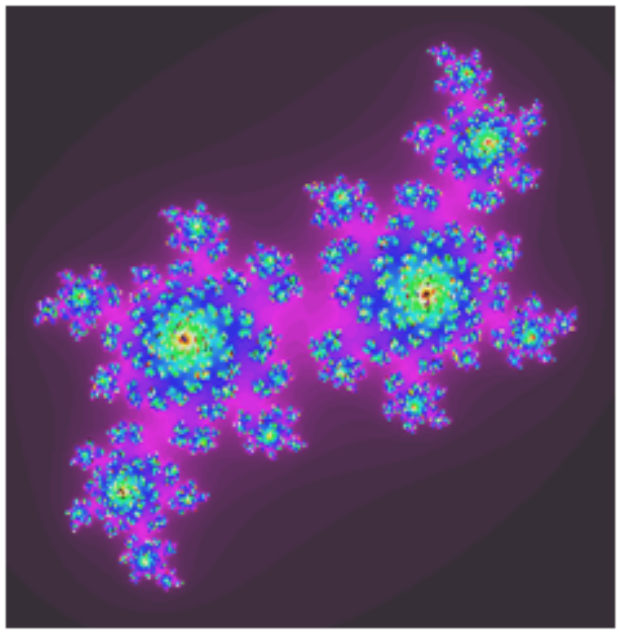
Dynamische Fraktale

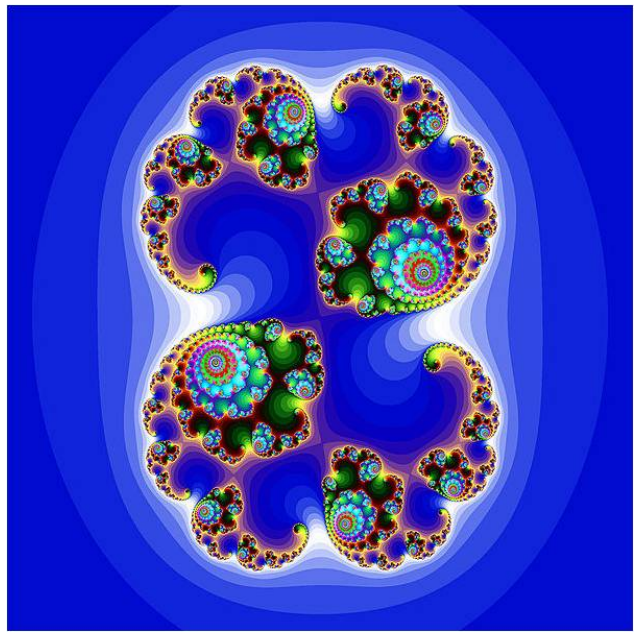
Julia-Mengen

Iteration auf der komplexen Ebene: $z \to f(z)$ *mit* $f(z)$ *meromorph*

Bei den meisten Punkten der Ebene (die bilden dann eine Fatou-Menge)
führt eine kleine Verschiebung des Startpunktes
zu keiner nennenswerten Änderung der Iterationsfolge.

Die restlichen Punkten bilden eine Julia-Menge:
da führt eine beliebig kleine Änderung des Startpunktes
zu komplett verändertem Iterationsverhalten.





Fraktale Dimension D einer Menge M
charakterisiert diese Menge *rein geometrisch*, "zeitlos".

Wird aber die Menge M in einem zeitlichen Prozess erkundet,
dann ist der Wert von D nicht unbedingt ausreichend.
Beispiele:

- Ein Messprozess *(Beobachtungsprozess)*: die Messdaten liegen auf M,
  bedecken diese Menge aber nicht unbedingt homogen:
  in manchen Bereichen mehr Messpunkten, in anderen weniger,
  in den dritten eventuell gar keine.
- Ein dynamisches System: eine Phasentrajektorie liegt ganz auf M,
  besucht aber nicht alle Teile von M gleichmäßig:
  in manchen Bereichen von M verbringt das System relativ viel Zeit,
  in den anderen relativ wenig, manche werden eventuell gar nicht besucht.

Falls wir nun die Menge M mit den Kästchen überdecken,
leisten unterschiedliche Kästchen unterschiedliche Beiträge in die Statistik;
aus der Sicht von D jedoch zählen sie alle gleich.

Eine Gewichtung muss her: jedes Kästchen mit Wahrscheinlichkeit ausstatten,
dass ein Messpunkt (oder Segment der Phasentrajektorie)
in diesem Kästchen liegt.

Generalisierte Dimensionen D_q

Wir überdecken den Raum mit den nummerierten Kästchen von Seitenlänge ε.

- Sei p_i Wahrscheinlichkeit, das i-tes Kästchen sich mit dem untersuchten Objekten (geometrische Struktur, Messdaten, Phasentrajektorie...) überschneidet.
- Wir bilden für ein reelles q die Summe $\sum_{p_i \neq 0} p_i^q$ über alle *nicht leere* Kästchen

  Warum nicht leere? Um auch negative Werte von q zu erfassen!

- Die generalisierte Dimension D_q definiert sich als $\dfrac{1}{q-1} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln \sum\limits_{p_i \neq 0} p_i^q}{\ln \varepsilon}$
- $q{=}0 \Rightarrow D_0 (= D)$: *Kapazitätsdimension*; $q{=}2 \Rightarrow D_2$: *Korrelationsdimension*;

  $q{=}1$ (mit l'Hospital): $D_1 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}$: *Informationsdimension*.
- Aus $q_1 > q_2$ folgt $D_{q_1} \leq D_{q_2}$. $\Longrightarrow D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \ldots$
- Alle D_q gleich $\Rightarrow$ das untersuchte Objekt wird *monofractal* genannt, sonst heißt es *multifractal*.