

Vorlesung 10.

# Selbsterregte Schwingungen.

Van der Pol-Gleichung.  
Rayleigh-Gleichung.  
Relaxationsschwingungen.

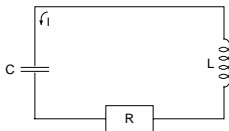




- ▷ Andronov-Hopf Bifurkation markiert den Übergang von zeitunabhängigem Verhalten zu periodischen Schwingungen.
- ▷ In der Nähe zum Übergang sind die Oszillationen fast harmonisch: mit konstanter Amplitude und sich uniform drehender Phase. Weiter weg von der Schwelle können sie ganz unterschiedlich aussehen.
- ▷ Gemeinsam allen Arten solcher Schwingungen ist: zeitabhängige Dynamik wird **nicht** von außen aufgezwungen.
- ▷ Im Gegensatz zu einem **linearen** System mit periodischem externen Antrieb, braucht ein **nichtlineares** System mit dem **Grenzyklus** **keine** periodische Einwirkung um zu oszillieren. Äußere Bedingungen (Energiezufuhr) bleiben konstant, das System schwingt dennoch, und Schwingungsfrequenz entsteht “vom alleine”.
- ▷ Dynamik dieser Art nennt man **“selbsterregte Schwingungen”**, oder, im Englischen, **self-sustained oscillations**. Man merke Betonung auf **Erzeugung** (-erregte) vs. **Erhaltung** (-sustained). Manchmal werden sie auch **autooscillations** genannt, was beide Aspekte berücksichtigt.



Beispiel von Schwingungen in Elektrotechnik:  
in einem Schaltkreis mit Kapazität  $C$  und Induktivität der Spule  $L$



beobachtet man lineare elektrische Schwingungen.

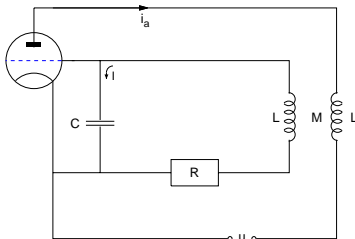
Der Strom  $I$  oszilliert:  $I(t) \sim \exp(i\omega_0 t)$  mit  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ,

... aber nur so lange man den Ohmschen Widerstand  $R$  vernachlässigt:

$$I(t) \sim e^{-\frac{R}{2L}t} \exp(i\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Die Schwingung klingt exponentiell ab. Wie kann man sie zuverlässig erhalten?

Balthasar Van der Pol hat den Schaltkreis in einen größeren Kreis mit einer Vakuumröhre (Triode), Zusatzspule  $L$  und Spannungsquelle  $u$  eingebaut.



Die Gitterspannung  $u_g$  kann den Teilchenstrom von der Kathode zur Anode verstärken oder unterdrücken.  $u_g(t)$  obliegt einer DGL 2.Ordnung.

Wird die Abhängigkeit  $i_a(u_g)$  durch ein Polynom  $\sum_{j=0}^3 a_j u_g^j$  approximiert, entsteht nach Umskalierung  $\{t \rightarrow \omega_0 t, x(t) \sim u_g(t), A \equiv -\omega_0(RC + a_0)\}$  die **Van der Pol-Gleichung**:

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Ein Oszillator mit **nichtlinearer Reibung!**



$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = 0$$

$$\triangleright \dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x + (A - x^2)y$$

einziges Gleichgewicht:  $x=y=0$

$$\triangleright \text{Jacobian: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - A\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

$A < -2$ : stabiler Knoten.

$-2 < A < 0$ : stabiler Fokus.

$0 < A < 2$ : instabiler Fokus.

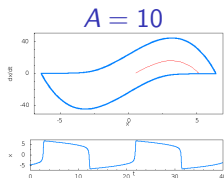
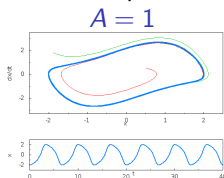
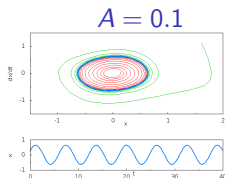
$A > 2$ : instabiler Knoten.

- $\triangleright$  Globaler Attraktor bei allen negativen Werten von  $A$ : Gleichgewicht.
- $\triangleright$  Stabilitätsverlust bei  $A = 0$ :  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , Andronov-Hopf Bifurkation.
- $\triangleright$  Globaler Attraktor bei allen positiven Werten von  $A$ : Grenzyklus.



Van der Pol-Gleichung:  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = 0$

Phasenportraits:



Schwingungen bei  $A = 0.1$  sind fast sinusoidal, “quasiharmonisch”.  
Grenzzyklus hat eine elliptische Form.

Schwingungen bei  $A = 1$  sind deutlich asymmetrisch bezüglich Umkehr der Zeitrichtung. Grenzzyklus wirkt etwas rechteckig.

Schwingungsmuster bei  $A = 10$  besteht aus den ausgedehnten Segmenten mit der langsamen Abnahme von  $|x|$  und sprunghaften Übergängen.

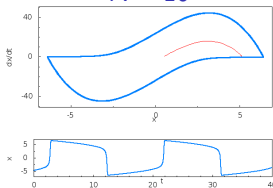
An der glatten Phasenkurve bilden sich “Ecken”.

Die Amplitude von  $|dx/dt|$  wächst rasant.



Van der Pol-Gleichung:  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = 0$

$$A = 10$$



Bei großen Werten von  $A$  wechseln sich Abschnitte mit **schnellen** und **langsamen** Bewegungen ab. Stark nichtlineare Schwingungen dieser Art werden (seit dem Van der Pol) **Relaxationsschwingungen** genannt.

*Beispiel:* In einem Schaltkreis wird der Kondensator langsam aufgeladen, bis sich die rasche Glimmentladung einsetzt, und alles von vorne beginnt.

*Andere Beispiele:* *geothermale Geysire, Kardiogramm, feuernde Hirnzellen, Quietschen der Kreide an der Tafel ...*



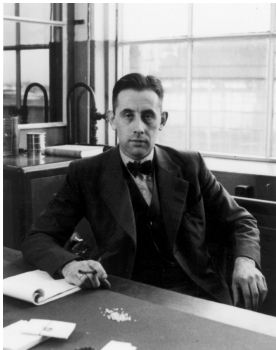
The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science

Series 7

ISSN: 1941-5982(Print) 1941-5990(Online) Journal homepage: <http://www.tandfonline.com/loi/lphm18>

### LXXXVIII. On "relaxation-oscillations"

Balth. van der Pol Jun. D.Sc



2. A solution of the form  $(2x)$  is, however, physically unrealizable because it indicates an amplitude growing to infinity. Thus for actual physical systems the differential equation (3) will only be valid for values of  $x$  up to a certain value. To express the limitation of the amplitude we must assume that the coefficient of the "resistance" term is a function of the amplitude itself, becoming positive at the higher values. Thus we may in (3) replace  $\alpha$  by the expression  $\alpha - \beta\gamma x^2$ , where  $\gamma$  is a constant. Hence we obtain instead of (3):

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta\gamma x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad \dots \quad (4)$$

This equation has been previously considered \* in connexion with the subject of triode oscillations.

Let us now change the units of time and of  $x$  and write

$$\left. \begin{aligned} \omega t &= t', \\ x &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}} v. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4a)$$

Then (4) becomes (after dropping the accents)

$$\frac{d^2v}{dt'^2} - \frac{\alpha}{\omega} (1 - v^2) \frac{dv}{dt'} + v = 0. \quad \dots \dots \dots (5)$$

Writing further

$$\frac{x}{\omega} = \epsilon$$

and using fluxional notation we have

$$\dot{v} - \epsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0. \quad \dots \dots \dots (6)$$



Dieselbe Zeitschrift, etwa 40 Jahre vor Van der Pol:

THE  
LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN  
PHILOSOPHICAL MAGAZINE  
AND  
JOURNAL OF SCIENCE.

[FIFTH SERIES.]

APRIL 1883.

XXXIII. *On Maintained Vibrations.* By Lord RAYLEIGH,  
F.R.S., Professor of Experimental Physics in the University  
of Cambridge\*.

WHEN a vibrating system is subject to dissipative forces, the vibrations cannot be permanent, since they are dependent upon an initial store of energy which suffers gradual exhaustion. In the usual equation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$\kappa$  is positive, and the solution indicates the progressive decay of the vibrations in accordance with the exponential law. In



When  $\kappa$  is negative, so that small vibrations tend to increase, a point is of course soon reached after which the approximate equations cease to be applicable. We may form an idea of the state of things which then arises by adding to equation (1) a term proportional to a higher power of the velocity. Let us take

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa \frac{d\theta}{dt} + \kappa' \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^3 + n^2\theta = 0, \quad \dots \dots (2)$$

Rein phänomenologisch:  $\ddot{\theta} + \kappa\dot{\theta} + \kappa'\dot{\theta}^3 + n^2\theta = 0$ , mit  $\kappa < 0$

Nach der Umskalierung:  $\ddot{y} - (A - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0$

Geschwindigkeitsabhängiger Reibungskoeffizient  $\dot{y}^2 - A$ .



$$\ddot{y} - (A - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0$$

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = -y + (A - z^2)z$$

einziges Gleichgewicht:  $y=z=0$

Aus der Sicht des linearisierten System, **keine** Unterschiede zu VdP:

▷ Jacobian:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - A\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$

$A < -2$ : stabiler Knoten.

$-2 < A < 0$ : stabiler Fokus.

$0 < A < 2$ : instabiler Fokus.

$A > 2$ : instabiler Knoten.

- ▷ Globaler Attraktor bei allen negativen Werten von  $A$ : Gleichgewicht.
- ▷ Stabilitätsverlust bei  $A = 0$ :  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , Andronov-Hopf Bifurkation.
- ▷ Globaler Attraktor bei allen positiven Werten von  $A$ : Grenzyklus.
- ▷ Unterschied: Nichtlinearität.  $(x^2 \dot{x})$  in VdP versus  $(\dot{y}^3)$  in Rayleigh-Gl.



Van der Pol-Gleichung:  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = 0$

Rayleigh-Gleichung:  $\ddot{y} - (A - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0$

▷ Neue Variable:  $u = \dot{y}\sqrt{3}$ .

⇒ Rayleigh-Gleichung:  $\dot{u} - \left(A - \frac{u^2}{3}\right)u + \int u(t)dt = 0$

▷ Differenzieren nach der Zeit:  $\ddot{u} - (A - u^2)\dot{u} + u = 0$

⇒ identisch mit Van der Pol-Gleichung.





Beispiel Rayleigh-Gleichung:  $\ddot{y} - (A - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0$   
bei **großen** Werten von  $A$ .

- ▷ wir hätten aber lieber einen kleinen Parameter.

Umskalierung:  $dt = d\tau/A$  (langsame Zeit, *um den Faktor  $A$  langsamer*)  
und  $y = A^{3/2}u$  (kleinere Amplitudenwerte)

- ▷  $\frac{1}{A^2}\ddot{u} - (1 - \dot{u}^2)\dot{u} + u = 0$

- ▷  $\epsilon\ddot{u} - (1 - \dot{u}^2)\dot{u} + u = 0$  mit  $\epsilon \equiv A^{-2} \ll 1$ .

eine DGL mit dem kleinen Parameter **vor der** obersten Ableitung.

beim  $\epsilon=0$  wird die Ordnung um eins kleiner: **singulärer Grenzfall!**

- ▷ Als System 2.Ordnung: 
$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \epsilon\dot{v} &= (1 - v^2)v - u\end{aligned}$$

Für zufällige Kombinationen von  $u$  und  $v$ , gilt es:  $|\dot{u}| \ll |\dot{v}|$ .

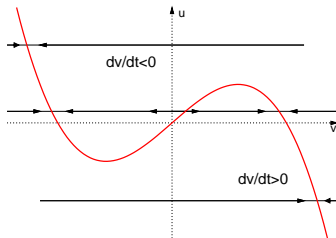
- ▷ Damit ist  $u$  eine **langsame** Variable, und  $v$  eine **schnelle** Variable.



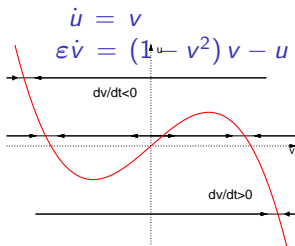
Als Gleichungssystem:  $\dot{u} = v$   
 $\epsilon \dot{v} = (1 - v^2)v - u$

Für zufällige Kombinationen von  $u$  und  $v$ , gilt es:  $|\dot{u}| \ll |\dot{v}|$ .  
Damit ist  $u$  eine **langsame** Variable, und  $v$  eine **schnelle** Variable.

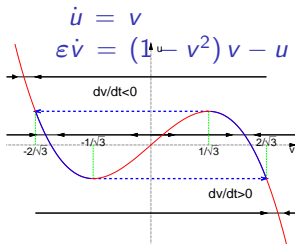
Langsam wird  $v$  **nur** in der Nähe ihrer Nullkline  $u = v - v^3$



- ▶ Vom zufälligen Anfangspunkt, z.B. links und unterhalb der  $v$ -Nullkline „fliegt“ das System schnell und fast waagrecht nach rechts zum rechten Ast der Nullkline.
- ▶ Dort angekommen, kriecht es langsam den Ast hoch bis zum Extremum....



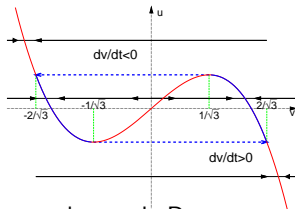
- ▶ Vom zufälligen Anfangspunkt, z.B. links und unterhalb der  $v$ -Nullkline „fliegt“ das System schnell und fast waagrecht nach rechts zum rechten Ast der Nullkline.
- ▶ Dort angekommen, kriecht es langsam den Ast hoch bis zum Extremum. Da auch hier  $\dot{u}=v$  noch positiv bleibt, hebt es vom Ast ab und muss dann schnell zum linken Ast der Nullkline fliegen.
- ▶ Entlang dem **linken** Ast kriecht das System nach unten bis zum Minimum. Von dort fliegt es schnell zum **rechten** Ast, und die Bahn schließt sich.



- ▶ Vom zufälligen Anfangspunkt, z.B. links und unterhalb der  $v$ -Nullkline „fliegt“ das System schnell und fast waagrecht nach rechts zum rechten Ast der Nullkline.
- ▶ Dort angekommen, kriecht es langsam den Ast hoch bis zum Extremum. Da auch hier  $\dot{u}=v$  noch positiv bleibt, hebt es vom Ast ab und muss dann schnell zum linken Ast der Nullkline fliegen.
- ▶ Entlang dem **linken** Ast kriecht das System nach unten bis zum Minimum. Von dort fliegt es schnell zum **rechten** Ast, und die Bahn schließt sich.



$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \varepsilon \dot{v} &= (1 - v^2)v - u\end{aligned}$$



Periodendauer der Relaxationsschwingungen kann als Bewegungszeit entlang den zwei Abschnitten der  $v$ -Nullkline geschätzt werden:

*Beitrag von schnellen Flügen ist im Vergleich klein.*

Während der langsamen Bewegung entlang der Nullkline, bleibt auch die Variable  $v$  nicht "schnell": sie passt sich an die langsame Variable  $u$ .

Geschwindigkeit der Bewegung entlang der Nullkline:  $\frac{dv}{dt} = \frac{v}{1 - 3v^2}$

$$\text{Periodendauer: } T \approx \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1 - 3v^2}{v} dv + \int_{\frac{-2}{\sqrt{3}}}^{\frac{-1}{\sqrt{3}}} \frac{1 - 3v^2}{v} dv = 3 - 2 \ln 2$$

In **ursprünglichen** Zeiteinheiten der Rayleigh-Gleichung wird es zu  $A(3 - 2 \ln 2)$ :  
(Erinnerung:  $\varepsilon = 1/A^2$ )

Periodendauer der Relaxationsschwingungen wächst proportionell zu  $A$ .