Vorlesung 12.

# Stabilität periodischer Lösungen.

## Floquet-Theorie. Poincaré-Abbildung.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{x} \in R^N, \quad N \geq 2.$$

Periodische Lösung mit Periodendauer $T$ : $\boldsymbol{x}^{(p)}(t) = \boldsymbol{x}^{(p)}(t+T)$.

*Bevor eine Stabilitätsanalyse möglich wird, muss man beides:*
*sowohl $\boldsymbol{x}^{(p)}$ wie auch den Wert von $T$ kennen.*
*Die sind meist nicht vorgegeben, und (falls überhaupt) nur numerisch zugänglich.*
*Wir müssen aber jetzt voraussetzen,*
*dass uns die Lösung und die Periodendauer schon bekannt sind.*

Schicksal der (kleinen) Störungen entscheidet sich
auf der Zeitskala von $T$.

Zwei Zugänge:

- *analytisch* und
- *geometrisch* (qualitativ).

## Floquet-Theorie *(nach Gaston Floquet)*

- kleine Störung: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^{(p)}(t) + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$
- Taylor-Entwicklung *(komponentenweise)*:

$$\dot{x}_i^{(p)}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) = f_i\left(\boldsymbol{x}^{(p)}(t)\right) + \sum_j \frac{\partial f_i\left(\boldsymbol{x}(t)\right)}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(p)}(t)} \tilde{x}_j(t) + O(\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2)$$

- Jacobi-Matrix ist zeitabhängig
  und wird an der periodischen Lösung $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ berechnet.
- Linearisierung: $$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \sum_j \frac{\partial f_i\left(x(t)\right)}{\partial x_j} \tilde{x}_j(t)$$
- $\Rightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$:

  homogene lineare DGL mit periodischen Koeffizienten.

# Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung $N$
mit periodischen Koeffizienten.

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) \;=\; A(t)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \quad \text{mit } A(t+T) = A(t).$$

Allgemein gibt es $N$ linear unabhängiger Lösungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^1(t) &= \{x_1^1(t), x_2^1(t), \ldots, x_N^1(t)\} \\
\boldsymbol{x}^2(t) &= \{x_1^2(t), x_2^2(t), \ldots, x_N^2(t)\} \\
&\ldots \\
\boldsymbol{x}^N(t) &= \{x_1^N(t), x_2^N(t), \ldots, x_N^N(t)\}
\end{aligned}$$

Zusammen bilden sie eine Fundamentalmatrix:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t) = \left[\left[\boldsymbol{x}^1(t)\right] \ldots \left[\boldsymbol{x}^N(t)\right]\right]$$

Wir wählen die linear unabhängigen Lösungen so aus,
dass sie zu $t{=}0$ einer Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}_N$ entsprechen: $\tilde{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{E}_N$.

## Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung $N$
mit periodischen Koeffizienten.

*Matrix-DGL:* $\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$.

Floquet: Es existiert eine konstante ($t$-unabhängige) Matrix $\boldsymbol{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{\boldsymbol{X}}(t+T) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t)\,\boldsymbol{C}$.

($t$=0 einsetzen) $\Rightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{X}}(T) = \tilde{\boldsymbol{X}}(0)\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}_N\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$ $\Rightarrow \boldsymbol{C} = \tilde{\boldsymbol{X}}(T)$,
$\boldsymbol{C}$ ist Ergebnis der Evolution einer Einheitsmatrix nach einer Periode $T$.

Diese $N \times N$ Matrix $\boldsymbol{C}$ heißt *Monodromie-Matrix*.

$\mu o \nu o \varsigma$: einzig, $\delta \rho o \mu o \varsigma$: Rennstrecke

Deren Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_N$ werden *Floquet-Multiplikatoren* genannt.

Da $\boldsymbol{C}$ eine reelle Matrix, sind $\mu_i$ entweder reell,
oder paarweise komplex-konjugiert.

Spur einer Matrix ist Summe ihrer Eigenwerte $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C}) = \sum_j^N \mu_j$

# Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t) \quad \text{mit } A(t+T) = A(t).$$

Floquet: Es existiert eine konstante ($t$-unabhängige) Matrix $\boldsymbol{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t)\,C$.

Wir nehmen eine spezielle Anfangsstörung $\tilde{y}(0)$, die einem Eigenvector der Matrix $\boldsymbol{C}$ mit dem Eigenwert (*Multiplikator*) $\mu_i$ entspricht.
Dann: $\tilde{y}(T) = \tilde{y}(0)\boldsymbol{C} = \mu_i\,\tilde{y}(0)$.

Weiter: $\tilde{y}(2T) = \tilde{y}(T)\boldsymbol{C} = \mu_i^2\,\tilde{y}(0)$ und allgemein $\tilde{y}(nT) = \mu_i^n\,\tilde{y}(0)$.

Nach jeder Periode $T$ wird die Störung
mit dem Eigenwert $\mu_i$ multipliziert (daher *Multiplikator*).

Bei einem komplexen $\mu_i$ wird die Störung
nicht nur mit Faktor $|\mu_i|$ gestreckt bzw. gekürzt:
sie dreht sich im Phasenraum um den Winkel $\mathrm{Arg}(\mu_i)$.

## Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t) \quad \text{mit } A(t+T) = A(t).$$

*Superpositionsprinzip*: Eine allgemeine Anfangsstörung
kann an die Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{C}$ projiziert werden.
Dann wird die $k$.-Komponente der Störung $(k = 1, \ldots, N)$
nach jeder neuen Periode $T$ mit dem Eigenwert $\mu_k$ multipliziert.

$\Rightarrow$ Stabilitätsbedingung: damit die Störung nicht wächst,
muss $\forall i$ die Ungleichung $|\mu_i| \leq 1$ gelten:
keine Floquet-Multiplikatoren außerhalb des Einheitskreises.

# Floquet-Theorie

Betrachten wir nun die Evolution
einer besonderen Anfangsstörung der periodischen Referenz-Lösung:

$$\tilde{x}(0) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(p)}(0)\right) \cdot \delta t \quad \text{mit hinreichend kleinem } \delta t.$$

Sie liegt direkt auf der Bahnkurve der ungestörten Referenz-Lösung
und ist nichts anderes als eine Verschiebung entlang der Bahn.

Damit läuft die gestörte Lösung die ganze Zeit entlang der
(periodischen!) Referenz-Kurve, und nach dem Zeitintervall $T$
ist sie wieder $\tilde{x}(0)$: weder gewachsen noch geschrumpft.

Da diese Störung nach einer Periode $T$
exakt zu ihrem Anfangszustand zurückfindet, ist sie neutral.
Da die Störungsamplitude sich nach der Zeit $T$ nicht ändert,
ist entsprehender Multiplikator gleich 1.

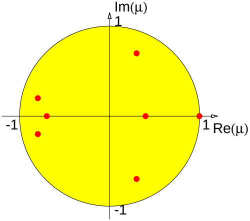
Damit ist bei autonomen Systemen ein Multiplikator immer gleich 1:
er entspricht einer Störung entlang der ursprünglichen periodischen Bahn
(tangentiale Störung).

Neutrale Störung folgt aus der Zeitunabhängigkeit der Gleichungsform:
ein autonomes System ist invariant bezüglich der Zeitverschiebung.

# Floquet-Theorie

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^{(p)}(t) + \tilde{\boldsymbol{x}}(t), \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \text{ mit } A(t+T) = A(t).$$

Eine stabile periodische Lösung $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$:
es liegen keine Multiplikatoren außerhalb des Einheitskreises.

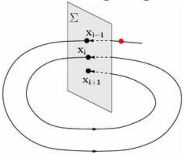



Bei Stabilitätsverlust durchqueren ein (reeller) oder zwei (komplex-konjugierte) Multiplikatoren den Einheitskreis.

Qualitativ, gibt es dazu drei Möglichkeiten:

- Ein reeller Multiplikator, $\mu = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\mu = -1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\mu = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \quad \varphi \neq \pi n$.

## Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang




Einer periodischen Lösung entspricht im $N$-dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.

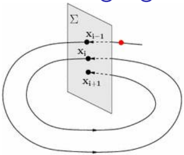
- Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N-1)$-dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve transversal schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche lokale Koordinaten $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_k \;\rightarrow\; \{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_{k+1}$$

- Ein Satz von $N$–1 Zahlen wird in einen anderen Satz von $N$–1 Zahlen überführt durch eine umkehrbare, stetige und differenzierbare Abbildung:

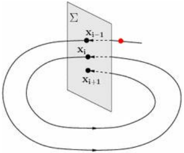
  Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), *return mapping*.
- Iterationen dieser Abbildung entsprechen zeitlicher Evolution entlang einer Bahnkurve des ursprünglichen System.
  Eigene "Zeit" der Abbildung wird ganzzählig: Anzahl der Iterationen $k$.

## Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang




Einer periodischen Lösung entspricht im $N$-dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.

- Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N-1)$-dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve transversal schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche lokale Koordinaten $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_k \ \rightarrow \ \{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_{k+1}$$
- Ein Satz von $N$–1 Zahlen wird in einen anderen Satz von $N$–1 Zahlen überführt durch eine umkehrbare, stetige und differenzierbare Abbildung:
Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), *return mapping*.
- Die "echte" zeitliche Dauer der Iteration *(also, die Periodendauer $T$ in ursprünglichen Zeiteinheiten!)* spielt dabei keine Rolle; wir wollen nur, dass sie beschränkt bleibt.




Poincaré-Abbildung überführt in sich die Koordinaten
auf einer ($N$–1)-dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve)
im System mit kontinuierlicher Zeit
liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Rückkehrabbildung am Fixpunkt, der
der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen
die $(N-1)\times(N-1)$ Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

Die $N$-1 Eigenwerte dieser Matrix sind die (uns schon bekannten)
Floquet-Multiplikatoren.

Einer fehlt: es ist Eigenwert 1: er charakterisiert Störungen
entlang der stetigen Bahnkurve, also transversal zur Poincaré-Ebene.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle $N$-1 Eigenwerte $\lambda$ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Bei Stabilitätsverlust durchqueren ein (reeller) oder zwei (komplex-konjugierte) der Eigenwerten den Einheitskreis.

Dabei gilt Zentrumsmannigfaltigkeitssatz:
$N$–1-dimensionale Dynamik reduziert sich auf eine $n$-dimensionale Abbildung;
$n$ ist Anzahl von relevanten Eigenwerten.

- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\lambda = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \;\; \varphi \neq \pi k \quad \Rightarrow \quad n = 2$.

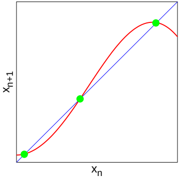
Damit ergeben sich 3 unterschiedliche typische Arten von Stabilitätsverlust.

Eindimensionale Abbildungen: allgemeine Merkmale

$$x \to f(x), \qquad\qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Graphische Darstellung.

Zusammen mit dem Graph der Funktion $f(x)$,
wird oft auch die Winkelhalbierende geplottet:
deren Schnittpunkte mit $f(x)$ sind Fixpunkte der Abbildung,
sie entprechen der periodischen Bahnkurven im kontinuierlichen System.

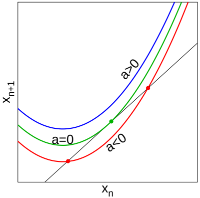



Stabilität vom Fixpunkt $x_p$: $\quad f(x_p + \delta) \approx f(x_p) + f'(x_p)\,\delta = x_p + f'(x_p)\,\delta$

Multiplikator: Steigung $f'(x_p)$ der Kurve im Fixpunkt.
Stabilitätsbedingung: $|f'(x_p)| \leq 1$.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte $\lambda$ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei 1 Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Laut dem Zentrumsmannigfaltigkeitssatz wird Dynamik
auf eine eindimensionale Abbildung reduziert.




Normalform: $x_{n+1} = x_n + a + x_n^2$, $f'(x) = 1 + 2x$

- $a < 0$: zwei Fixpunkte (instabiler und stabiler) bei $x = \pm\sqrt{-a}$.
- $a = 0$: ein neutraler Fixpunkt bei $x = 0$.
- $a > 0$: keine Fixpunkte.

Beim durchqueren des Werts $a = 0$ werden zwei Fixpunkte geboren/vernichtet.

Diese Bifurkation wird oft tangent bifurcation genannt,
wegen der Berührung von $f(x)$ mit der Winkelhalbierenden bei $a = 0$.

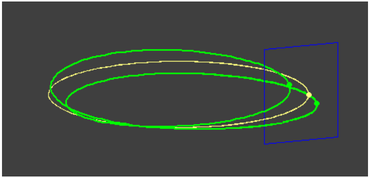
Im ursprünglichen zeit-kontinuierlichen System ist es eine
Sattel-Knoten Bifurkation von periodischen Lösungen:

zwei geschlossene Phasenbahnen stoßen aufeinander
(entlang der ganzen Länge) und verschwinden.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte $\lambda$ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei –1 Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Die Störung, die auf dem entsprechenden Eigenvektor liegt,
ändert ihr Vorzeichen nach einem Umlauf im Phasenraum.

Nach dem zweiten Umlauf, ändert sich das Vorzeichen wieder:
$\Rightarrow$ ursprüngliche Störung wird wiederhergestellt.



So entsteht im Phasenraum eine Trajektorie, die sich
nach zwei Runden schließt und eine verdoppelte Periodendauer hat.
Das ist eine Periodenverdopplungsbifurkation (period-doubling, flip).

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte $\lambda$ der Jacobi-Matrix gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei $e^{\pm i\boldsymbol{\theta}}$ Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Die entsprechende neutrale Störung wird nach einem Umlauf
weder größer noch kleiner im Betrag (Amplitude),
aber sie dreht sich um den Winkel $\boldsymbol{\theta}$ (Phasendrehung).

So, nach und nach, entsteht auf der Poincaré-Ebene ein invarianter Kreis;
falls $\boldsymbol{\theta} = 2\pi m/n$, schließt sich die Trajektorie
nach $n$ Iterationen der Abbildung (und $m$ Umdrehungen um den Kreis),
sonst bedeckt sie den ganzen Kreis dicht.

Einem invarianten Kreis auf der Poincaré-Ebene
entspricht im Phasenraum eine schlauchartige Oberfläche:
ein zwei-dimensionaler Torus.
Geburt von einem Torus aus einem Grenzzyklus
wird Neimark-Sacker-Bifurkation genannt.