

Vorlesung 14.

Lorenz-Attraktor: erstes Beispiel vom dynamischen Chaos

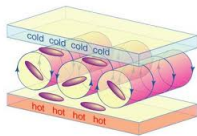




Kontext: Wettervorhersage.

Entstehung von Luftbewegungen infolge der thermischen Konvektion, angetrieben von der Sonneneinstrahlung in die Erdatmosphäre. (die aufgewärmten Elemente dehnen sich aus, werden leichter als die Umgebung, und – in einem Schwerkraftfeld – bewegen sie sich nach oben, wo sie sich abkühlen und wieder abtauchen.)

Atmosphäre wird als eine ebene Schicht betrachtet ($h \ll R_{\text{Erde}}$).
Die einsetzende konvektive Strömung besteht aus zweidimensionalen rotierenden Rollen.



Typische Geschwindigkeiten sind viel kleiner als Schallgeschwindigkeit
 \Rightarrow Inkompressibilität



Problemstellung: **zwei**dimensionale thermische Konvektion
in einer ebenen Schicht aus einer inkompressiblen Flüssigkeit
(Rayleigh-Bénard Konvektion)

Variablen (Felder): *keine Abhängigkeit von der Koordinate y .*
Geschwindigkeit $\mathbf{v}(x, z, t)$, Temperatur $T(x, z, t)$, Druck $p(x, z, t)$.

Bewegungsgleichungen: Navier-Stokes \rightarrow Boussinesq

$$\text{Impulserhaltung: } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} (1 - \beta(T - T_0))$$

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \text{Incompressibilität: } \text{div} \mathbf{v} = 0$$

ρ : Dichte, ν : kinemat. Viskosität, χ : Temperaturleitfähigkeit,
 \mathbf{g} : Schwerkraftbeschleunigung, β : Koeff. thermischer Ausdehnung,
 h : Höhe der flüssigen Schicht

Randbedingungen: An beiden Platten: $v_z = 0$.

Untere Platte: Temperatur T_1 ; obere Platte: Temperatur T_2 .

$$T_1 > T_2$$

Dimensionslose Kriterien: $\sigma \equiv \frac{\nu}{\chi}$ – Prandtl-Zahl,

$$Ra \equiv \frac{g\beta(T_1 - T_2)h^3}{\chi\nu} \text{ – Rayleigh-Zahl.}$$

Inkompressibilität $\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \exists$ skalare Stromfunktion $\Psi(x, z, t)$:

$$\text{so dass } v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Fourier-Zerlegung (mit Wellenzahl a in x -Richtung):

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(t) \exp\left(2\pi i \left(\frac{amx}{h} + \frac{nz}{2h}\right)\right)$$

$$T(x, z, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)z}{h} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \theta_{mn}(t) \exp\left(2\pi i \left(\frac{amx}{h} + \frac{nz}{2h}\right)\right)$$

Nach einer Multiplikation mit $\exp\left(2\pi i \left(\frac{ajx}{h} + \frac{kz}{2h}\right)\right)$ mit j, k ganzzählig, und Integration über Schichtvolumen (*Orthogonalität!*) entsteht unendlicher Satz gekoppelter gewöhnlichen DGL für $\psi_{mn}(t)$ und $\theta_{mn}(t)$.

Edward Lorenz: **Reduktion auf drei Variablen:**

(Bezeichnungen für diese Variablen nach Lorenz sind etwas ungenau: auch x, y, z)

$x(t) \sim \psi_{11}(t)$: Amplitude der ersten Fourier-Mode
von der Stromfunktion Ψ (Geschwindigkeitsfeld);
 $y(t) \sim \theta_{11}(t)$, $z(t) \sim \theta_{02}(t)$: Amplituden der zwei Fourier-Moden
des Temperaturfeldes T .

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = r x - y - x z$$

$$\dot{z} = x y - b z,$$

Parameter: σ – Prandtl-Zahl von der Flüssigkeit ($\sigma > 0$)

r – „normierte“ Rayleigh-Zahl: $r \equiv \frac{Ra}{Ra_0}$, $Ra_0 = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$,

b – geometrischer Parameter; $b = \frac{4}{1+a^2}$ ($b > 0$).



Eigenschaften von Lorenz-Gleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz,$$



- ▷ $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = -\sigma - 1 - b = \text{const} < 0 \rightarrow$ Phasenvolumen jeder Menge von Anfangsbedingungen schrumpft exponentiell im Laufe der Zeit:
$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+b+1)t}$$
- ▷ Dissipativität (Anwesenheit von einem absorbierenden Gebiet im Phasenraum).
- ▷ Symmetrie bezüglich der Transformation $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{array} \right\}$.



Gleichgewichte von Lorenz-Gleichungen

$$0 = \sigma(y - x)$$

$$0 = rx - y - xz$$

$$0 = xy - bz,$$



$$y = x \Rightarrow \begin{cases} rx - x - xz = 0 \\ x^2 - bz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(r - 1 - z) = 0 \\ x^2 = bz \end{cases}$$

Entweder $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow z = \frac{x^2}{b} = 0,$

oder $z = r - 1 \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{bz} = \pm\sqrt{b(r - 1)}.$

Gleichgewicht $x=y=z=0$ existiert bei allen Parameterwerten.

Zwei Gleichgewichte $x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}, z = r - 1$
existieren nur bei $r > 1$.

Bei $r = 1$ findet eine **Heugabel**-Bifurkation statt.



Attraktoren von Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$



Bei $r < 1$: Gleichgewicht $x=y=z=0$ ist global asymptotisch stabil.

Bei $r = 1$: superkritische Heugabel-Bifurkation.

Bei $1 < r < r_{AH}$: die Attraktoren sind zwei Gleichgewichte

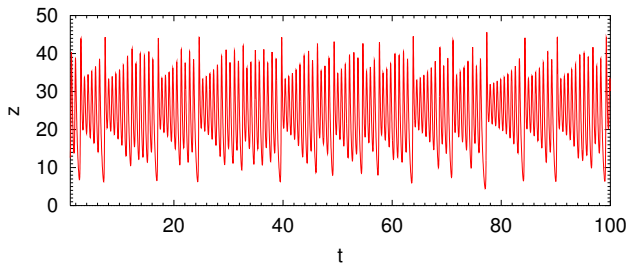
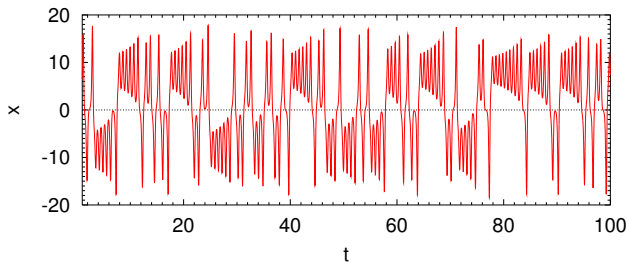
$$\text{mit } x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, z = r - 1.$$

Bei $r = r_{AH} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$: subkritische Andronov-Hopf
Bifurkation.

Bei $r > r_{AH}$: ??

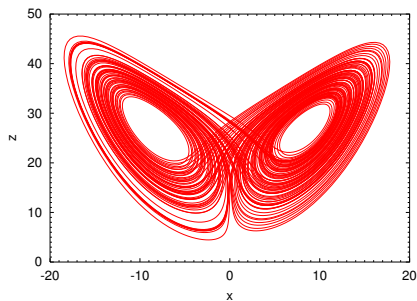
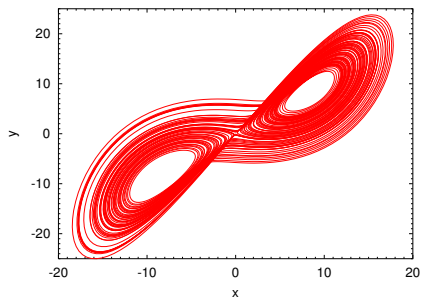


Numerische Integration bei $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.



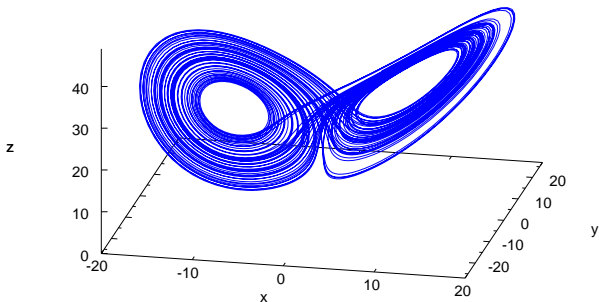


Projektionen vom Phasenportrait bei $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.





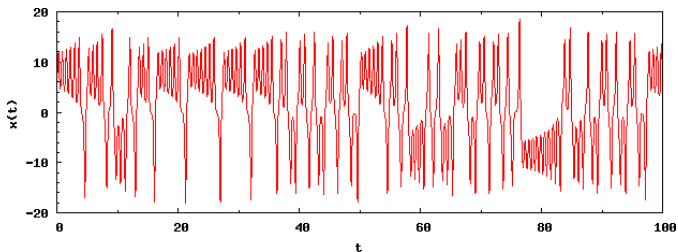
Lage vom Attraktor im 3D-Raum



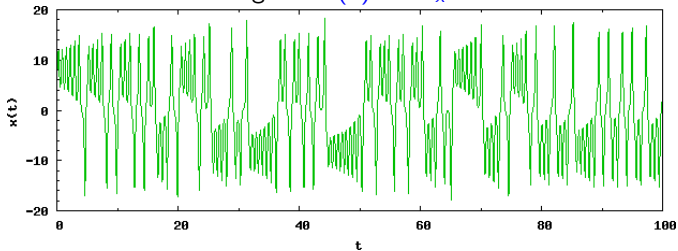
Auf den ersten Blick besteht der Attraktor aus den zwei flachen Flügeln.
Die Trajektorie ist aber in keiner zwei-dimensionalen Fläche eingebettet!
Der Attraktor ähnelt in jedem 2D-Schnitt einer Cantor-Menge.
Das ist Beispiel von einem **seltsamen Attraktor** (strange attractor).
Numerische Schätzung der fraktalen Dimension: $D \approx 2.05$.



Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen

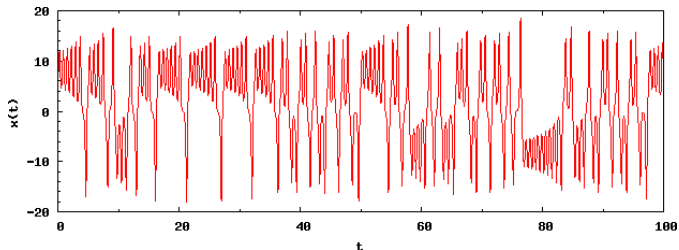


Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-2}$:

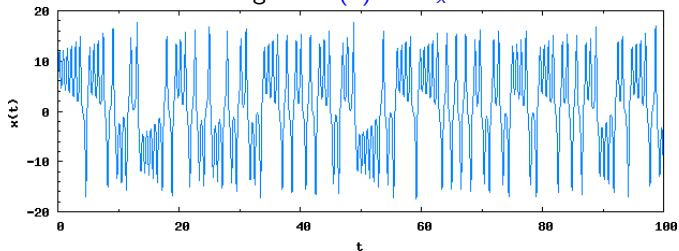




Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen

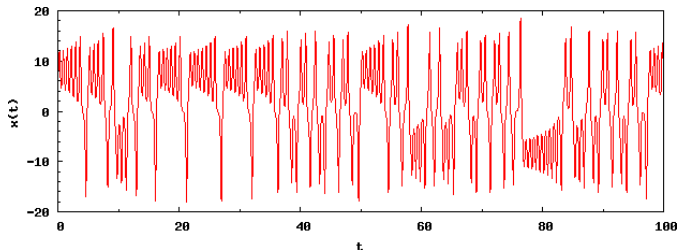


Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-4}$:

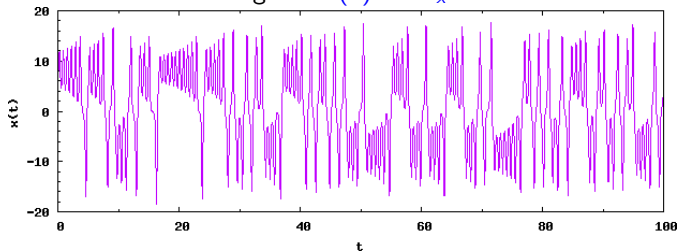


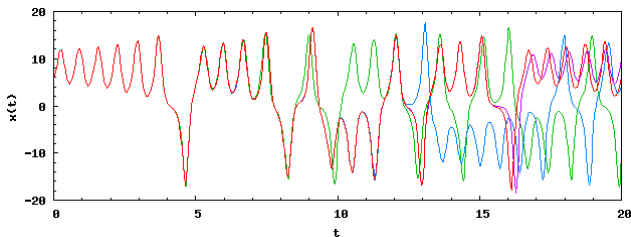


Empfindlichkeit gegenüber Anfangsbedingungen



Bei Änderung von $x(0)$ um $\delta_x = 10^{-6}$:





Benachbarte Trajektorien laufen auseinander:

jede einzelne Trajektorie auf dem Attraktor ist **instabil**.

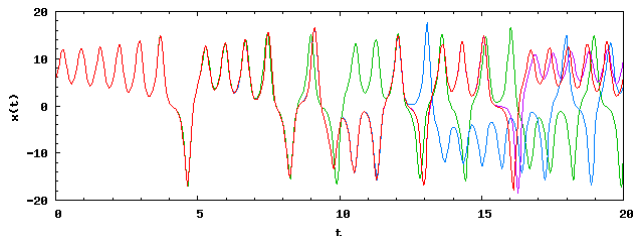
Das macht langzeitige Vorhersagen kaum möglich.

Inbesondere *Wettervorhersagen* (vorausgesetzt, die Gleichungen, die *echtes Wetter* beschreiben, teilen diese Eigenschaft):

für adäquate Anfangsbedingungen braucht man ein dichtes *3D*-Gitter aus Wetterstationen mit unendlich genauen Messwerten

(Temperatur, Druck, Windrichtung, Windstärke...).

⇒ Schmetterlingseffekt (*butterfly effect*)



Benachbarte Trajektorien laufen auseinander:

jede einzelne Trajektorie auf dem Attraktor ist **instabil**

aber deren Gesamtheit wirkt **anziehend**

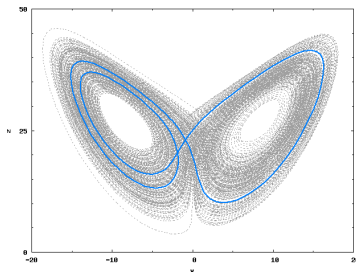
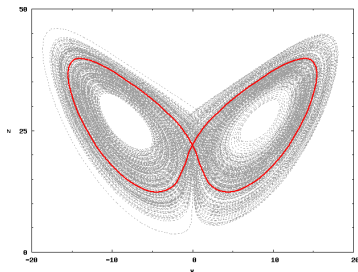
maximaler Abstand zwischen den Bahnen wird begrenzt
durch die endliche Größe vom Attraktor.

Im Laufe der Zeit kommen die chaotischen Orbits immer wieder
beliebig nah zueinander und entfernen sich erneut.

(Stabilität nach Poisson)



Im chaotischen Attraktor sind **unendlich viele instabile periodische Orbits** eingebettet:

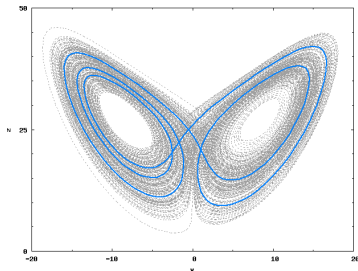
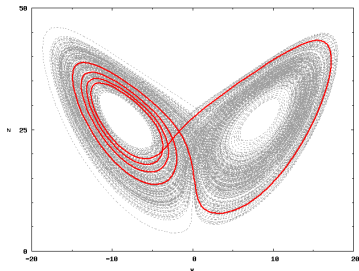


embedded **unstable periodic orbits** \rightarrow UPOs

Im Laufe der Zeit kommt eine chaotische Phasentrajektorie **jedem** UPO (und zwar immer wieder!) beliebig nah.



Im chaotischen Attraktor sind **unendlich viele instabile periodische Orbits** eingebettet:



embedded **unstable periodic orbits** \rightarrow UPOs

Im Laufe der Zeit kommt eine chaotische Phasentrajektorie **jedem** UPO (und zwar immer wieder!) beliebig nah.



- ▶ Edward Lorenz: *Deterministic non-periodic flow*, 1963.
 - ▶ David Ruelle, Floris Takens: *strange attractors*, 1971:
"Going back to the vector field X , we have thus a "strange" attractor which is locally the product of a Cantor set and a piece of two-dimensional manifold."
anziehende Mengen im Phasenraum,
die **keine** Mannigfaltigkeiten sind.
 - ▶ James Yorke: *chaos*, 1975. "Period three implies chaos":
unendlich viele periodische Lösungen.
 - ▶ Lorenz-Attraktor ist **seltsam und chaotisch**:
 - ▶ „seltsam“ (**strange**) bezieht sich auf seine Geometrie im Phasenraum,
„chaotisch“ charakterisiert die zeitliche Dynamik.
-
- ▶ Mary Cartwright, John Littlewood (Journ. London Math.Soc. 1945):
"On nonlinear differential equation of the 2nd order:
$$\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha), \quad k \text{ large.}"$$

"If, however, $b < 2/3$ and k is large enough, equation shows a rich variety of behaviour, some of it very bizarre".