Vorlesung 15.

Entstehung vom chaotischen Attraktor im Phasenraum der Lorenz-Gleichungen

Eigenschaften von Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma\,(y - x)\\ \dot{y} &= r\,x - y - x\,z\\ \dot{z} &= x\,y - b\,z,\end{aligned}$$

- $\operatorname{div}(\boldsymbol{f}) = -\sigma - 1 - b = \text{const} < 0 \quad \rightarrow$ *Phasenvolumen jeder Menge von Anfangsbedingungen schrumpft exponentiell im Laufe der Zeit.*
- Dissipativität (Anwesenheit von einem absorbierenden Gebiet im Phasenraum).
- Symmetrie bezüglich der Transformation $\left\{ \begin{array}{c} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{array} \right\}$.

Attraktoren von Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma\,(y-x)\\ \dot{y} &= r\,x - y - x\,z\\ \dot{z} &= x\,y - b\,z,\end{aligned}$$

Bei $r<1$: Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$ ist global asymptotisch stabil.

Bei $r=1$: superkritische Heugabel-Bifurkation.

Bei $1<r<r_{AH}$: die Attraktoren sind zwei symmetrische Gleichgewichte

mit $x=y=\pm\sqrt{b(r-1)},\ z=r-1$.

Bei $r=r_{AH}=\sigma\,\dfrac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$: subkritische Andronov-Hopf Bifurkation.

Bei „kanonischen“ Parameterwerten $(\sigma=10,\ b=8/3)$, $r_{AH}=24.7368\ldots$.

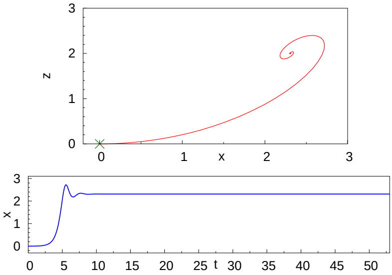
Bei $r>r_{AH}$: chaotischer Attraktor.

Eigentlich sind chaotische Schwingungen schon ab etwa $r\approx 24.06$ zu sehen; im Intervall $24.06<r<r_{AH}$ koexistieren sie mit (noch) stabilen Gleichgewichten.

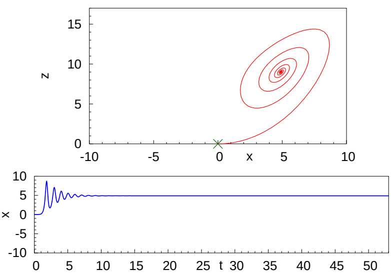
Frage: wie entsteht im Phasenraum der chaotische Attraktor?

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r*,*
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$ *(auf den Plots durch Kreuz gekennzeichnet).*
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht.*

$r = 3$



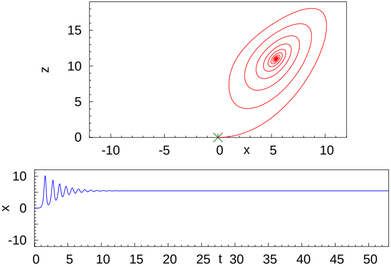
$r = 10$



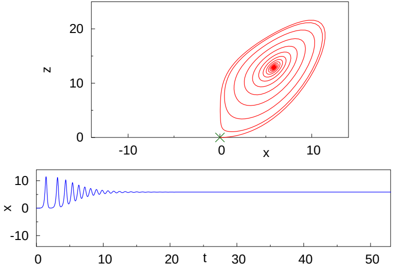
In beiden Fällen wickelt sich die Mannigfaltigkeit auf ein Gleichgewicht *(stabiler Fokus-Punkt)* im Halbraum $x > 0$.
Beim größeren Wert von r ist die erste „Umdrehung“ deutlich größer .

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen numerisch *für unterschiedliche Werte von r,*
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht*.

$r = 12$



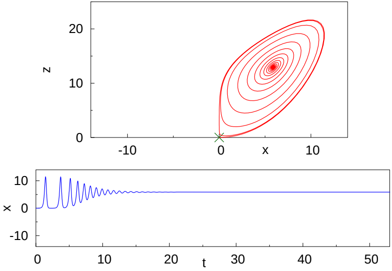
$r = 13.9$



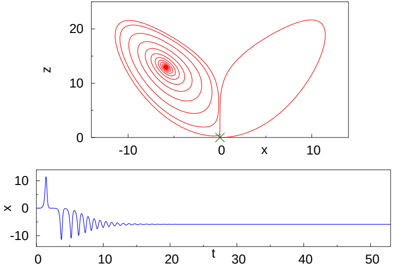
Die Mannigfaltigkeit wickelt sich weiterhin auf einen stabilen Fokus mit $x > 0$.
Nach der ersten Umdrehung kommt der Orbit immer näher zum Ursprung.

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht*.

$r = 13.926$



$r = 13.927$

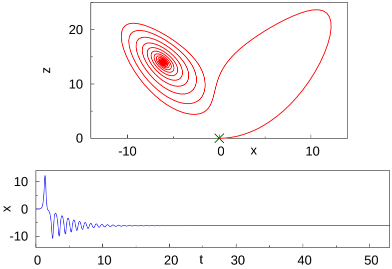


Umschaltung der Asymptotik: vom *stabilen Fokus* im Halbraum $x > 0$
zum *symmetrischen Fokus* im Halbraum $x < 0$.

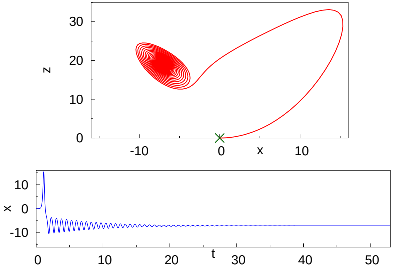
Dazwischen kehrt die instabile Mannigfaltigkeit exakt zurück zum Usrprung und bildet damit eine biasymptotische Trajektorie: die Homokline.

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht*.

$r = 15$



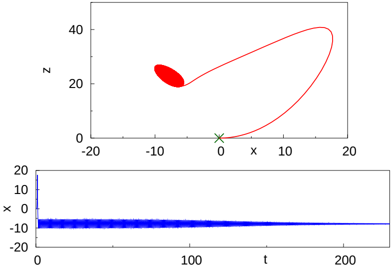
$r = 20$



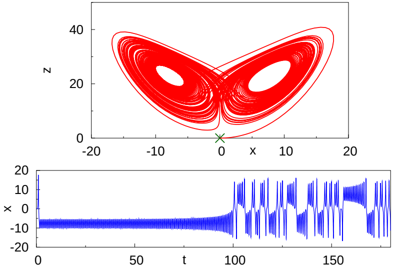
Die Mannigfaltigkeit wickelt sich weiterhin auf einen stabilen Fokus mit $x < 0$.
Dabei wird die Spirale zum Fokus immer enger.

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x{=}y{=}z{=}0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht*.

$r = 24.05$



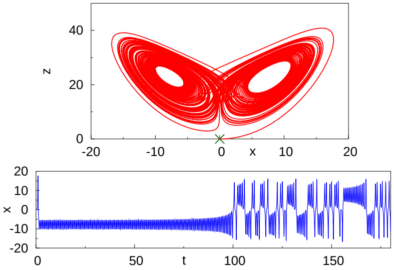
$r = 24.07$



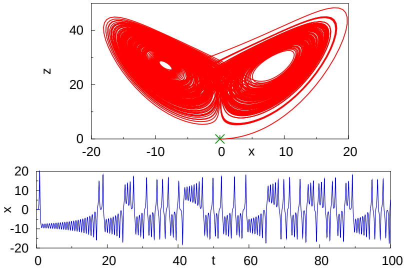
Die nächste Umschaltung: statt sich auf den Fokus aufzuwickeln (linkes Bild) ,
erst rollt die Spirale langsam nach außen ab,
und dann beginnen die chaotische Oszillationen (rechtes Bild).

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen numerisch *für unterschiedliche Werte von* r,
mit immer demselben Anfangspunkt
in unmittelbarer Nähe vom instabilen Gleichgewicht $x=y=z=0$.
Dies gibt uns Aufschluss über die Veranderungen in der Geometrie
der instabilen Mannigfaltigkeit *von diesem Gleichgewicht*.

$r = 24.07$



$r = 28$

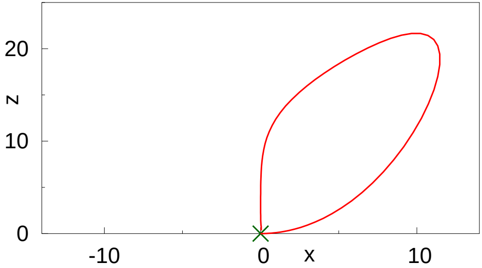


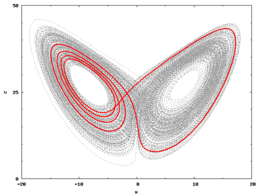
Das klassische Bild vom chaotischen Lorenz-Attraktor im Phasenraum:
der Übergang ist vollzogen.

Homoclinic bifurcation

$R = 13.926\ldots$

Da die Homokline eine geschlossene Phasenbahn ist, hinterlässt deren Zerfall einen periodischen Orbit.

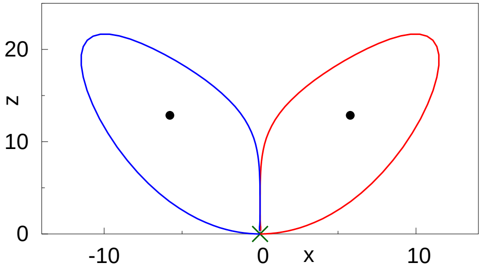


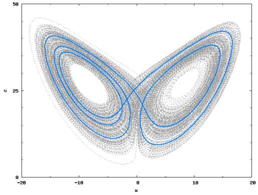


Homoclinic bifurcation

$R = 13.926\ldots$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Gleichungen, existieren die Homoklinen im Phasenraum immer paarweise.



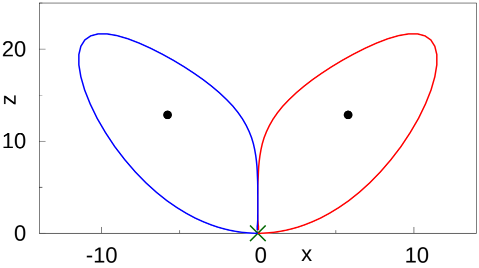


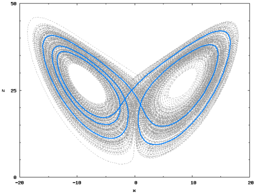
Beim Zerfall vom Homoklinenpaar entsteht eine unendliche Zahl von periodischen Orbits.
Diese Orbits unterscheiden sich voneinander durch die Anzahl und Reihenfolge
vom Umdrehungen im Phasenraum
links und rechts vom instabilen Gleichgewicht.

Homoclinic bifurcation

$R = 13.926\ldots$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Gleichungen, existieren die Homoklinen im Phasenraum immer paarweise.





Wir führen binäre symbolische Dynamik ein:

jede Umdrehung links vom Ursprung $\rightarrow L$,

jede Umdrehung rechts vom Ursprung $\rightarrow R$.

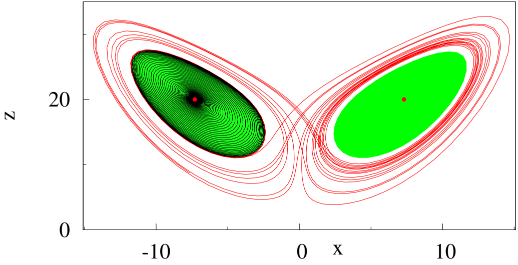
z.B. Label des Orbits am linken Bild: RRLLL.

Nach dem Zerfall vom Homoklinen-Paar entstehen im Phasenraum
instabile periodische Bahnen mit allen binären symbolischen Labels:
eine unendliche Menge von UPOs:
von kürzesten (1 Umdrehung im Phasenraum) L und R
bis zu beliebig langen, mit entsprechend langen binären *Labels*.

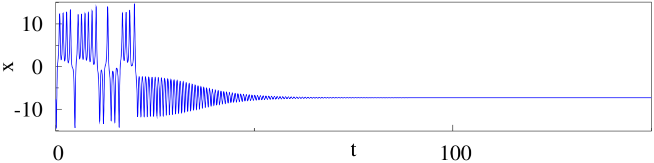
- Entstehung bei $r = r_{\mathrm{hom}} = 13.926$ und *sofortiger* Zerfall
  vom symmetrischen Paar der Homoklinen hinterlassen im Phasenraum
  eine unendliche Anzahl (abzählbare Menge) von *instabilen periodischen Bahnen*.
- Diese Bahnen bilden eine Gerippe *(skeleton)*
  für ein Kontinuum von *chaotischen Phasentrajektorien*,
  eine Art Baugerüst für den zukünftigen chaotischen Attraktor.
- Warum „zukünftigen"?
  Weil dieses Kontinuum als ganzes sofort nach seiner Geburt noch instabil ist:
  es enthält „Löcher" (Lücken), durch die die Trajektorien durchfallen
  um dann zu anderen Attraktoren (stabilen Gleichgewichten) zu entlaufen.
- In diesem Bereich von r-Werten existiert "metastable chaos":
  für typische Anfangsbedingungen beobachtet man eine Zeit lang
  ungeordnete Schwingungen,
  die plötzlich in eine schnelle Relaxation zum stabilen Gleichgewicht übergehen.
- Früher oder später, nach mehreren Umschwungen zwischen $x > 0$ und $x < 0$,
  kommt jede *chaotische* Trajektorie in den lokalen Einzugsgebiet
  von einem der Gleichgewichte und endet dort als eine Spirale "nach innen".

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r...

$r = 21$



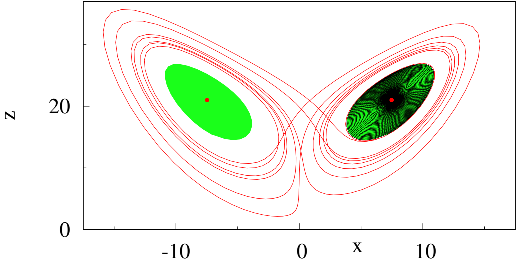
grüne Flächen:
Einzugsbereiche von stabilen nichttrivialen Gleichgewichten



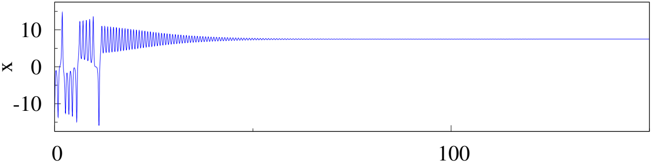
Auf die anfänglichen “chaotischen” Oszillationen
folgen gedämpfte Schwingungen um stabiles Gleichgewicht.

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r...

$r = 22$

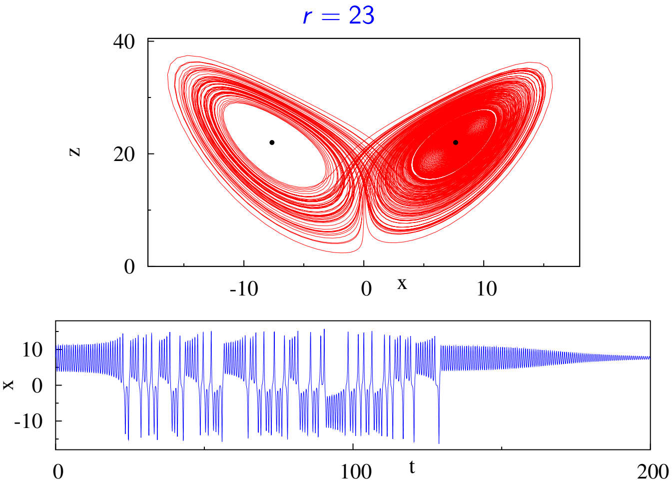


grüne Flächen: Einzugsbereiche von stabilen nichttrivialen Gleichgewichten



Auf die anfänglichen "chaotischen" Oszillationen
folgen gedämpfte Schwingungen um stabiles Gleichgewicht.

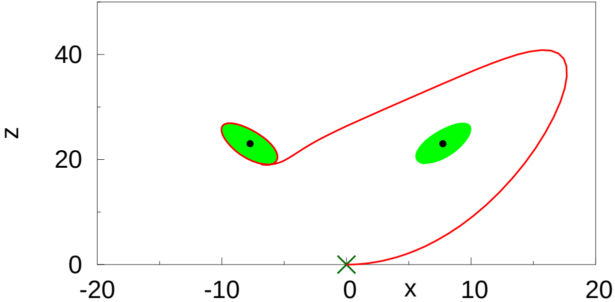
Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen *numerisch* *für unterschiedliche Werte von* r*...*



Mit dem Wachstum von r
wird die vorübergehende chaotische Phase immer länger.

Wir integrieren die Lorenz-Gleichungen numerisch *für unterschiedliche Werte von r...*

$r = 24.0579$



grüne Flächen: Einzugsbereiche von stabilen nichttrivialen Gleichgewichten

Bei diesem Wert von r endet im Phasenraum
die instabile Mannifaltigkeit vom trivialen Gleichgewicht $(0, 0, 0)$
unmittelbar an der instabilen periodischen Lösung, die im Phasenraum
den Einzugsbereich des (noch stabilen) Fokuspunktes abgrenzt.
Bei höheren Werten von r werden die chaotischen Schwingungen
nicht mehr aufhören: vorläufiges Chaos wird zum endgültigen Chaos.

▷ Entstehung bei $r = r_{\text{hom}} = 13.926$ und *sofortiger* Zerfall vom symmetrischen Paar der Homoklinen hinterlassen im Phasenraum eine unendliche Anzahl (abzählbare Menge) von *instabilen periodischen Bahnen*.

Diese Bahnen bilden eine Gerippe *(skeleton)* für ein Kontinuum von *chaotischen Phasentrajektorien*, eine Art Baugerüst für den zukünftigen chaotischen Attraktor.
Warum „zukünftigen“?
Weil dieses Kontinuum als ganzes sofort nach seiner Geburt noch instabil ist: es enthält „Löcher“ (Lücken), durch die die Trajektorien durchfallen um dann zu anderen Attraktoren (stabilen Gleichgewichten) zu entlaufen.
In diesem Bereich von r-Werten existiert “metastable chaos”: für typische Anfangsbedingungen beobachtet man eine Zeit lang *ungeordnete Schwingungen*, die plötzlich in eine schnelle Relaxation zum stabilen Gleichgewicht übergehen.

Mit Wachstum von r wächst auch die Lebenszeit der chaotischen Transiente, dafür wird die nachfolgende Relaxation zum Gleichgewicht etwas langsamer.

Bei $r = 24.0579$ schließen sich die „Lücken“, dadurch wird die chaotische Menge stabilisiert: sie wird zum chaotischen Attraktor.