Vorlesung 3.

Ein- und zweidimensionale Dynamik

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

- Phasenraum: Linie (offen oder geschlossen, z.B. ein Kreis).
  Beispiele: $\dot{x} = x^2 - 3x + 4$, $\dot{x} = 1 + \cos x$.
  Parameterabhängig: $\dot{x} = x^2 - 3\mu_1 x + 4\mu_2^2$, $\dot{x} = \mu + \cos x$.

- Auf der endlosen Linie bleibt die rigide Zahlenordnung *(groß liegt rechts vom klein)* erhalten:
  aus $x(t_0) < y(t_0)$ folgt $\forall t > t_0: \; x(t) < y(t)$.
  Es herscht ein komplettes Überholungsverbot.

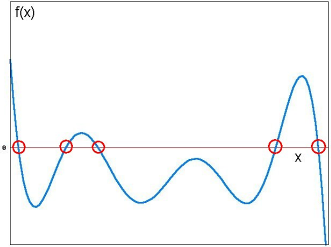
- Im Fall der geschlossenen Linie hat zwar die Zahlenordnung keinen Sinn, aber eine Überholung bleibt weiterhin verboten.

- Formell ist die Gleichung integrierbar: $t = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$,
  aber wir haben andere Interessen.

- Betrachten wir die Kurve $f(x, \boldsymbol{\mu})$.

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

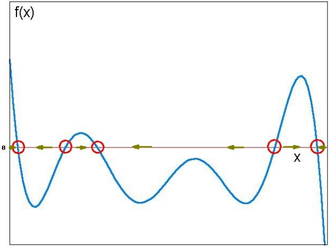


- Nullstellen dieser stetigen Funktion sind
  Ruhelagen (Gleichgewichte)
  des dynamischen Systems.

- Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.
  Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.

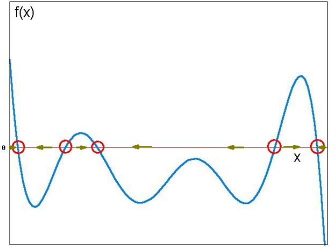


- Nullstellen dieser stetigen Funktion sind
  Ruhelagen (Gleichgewichte)
  des dynamischen Systems.
- Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$ wächst der Wert von $x(t)$.
  Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

  Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x > 0$ sind instabil.
  Nullstellen (Gleichgewichte) mit $\partial f / \partial x < 0$ sind asymptotisch stabil.
- „Eindimensionale Jacobi-Matrix": Wert von $\partial f / \partial x$ an der Nullstelle.

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

Betrachten wir die Kurve $f(x, \mu)$.



- Nullstellen dieser stetigen Funktion sind
  Ruhelagen (Gleichgewichte)
  des dynamischen Systems.

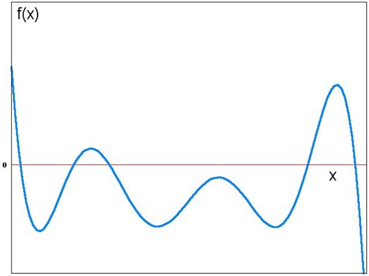
- Auf den Abschnitten mit positiver $f(x)$
  wächst der Wert von $x(t)$.
  Auf den Abschnitten mit negativer $f(x)$ nimmt der Wert von $x(t)$ ab.

- Entlang des Graphs der Kurve $f(x)$
  wechseln sich die Maxima mit den Minima,
  daher wechseln sich die Nullstellen mit $\partial f / \partial x > 0$
  mit den Nullstellen mit $\partial f / \partial x < 0$ ab.

  $\Longrightarrow$ instabile Gleichgewichte wechseln sich mit den stabilen ab.

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

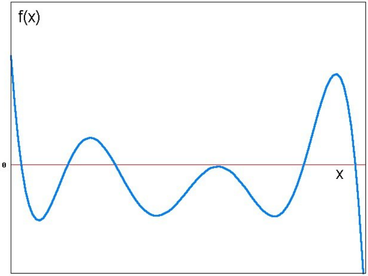
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

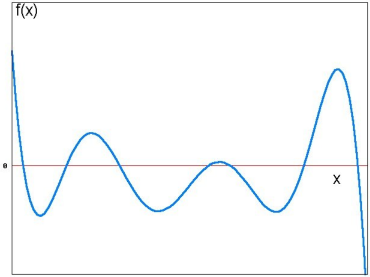
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \mu)$.

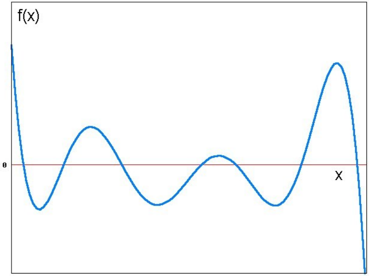
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

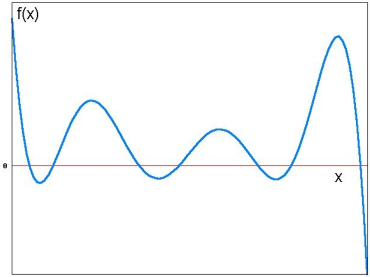
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

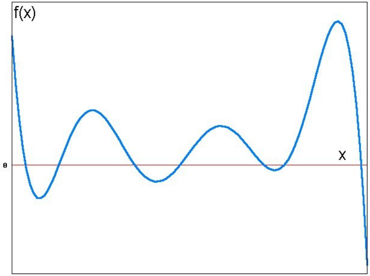
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

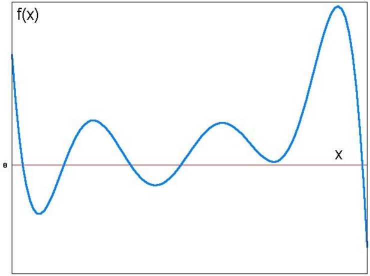
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

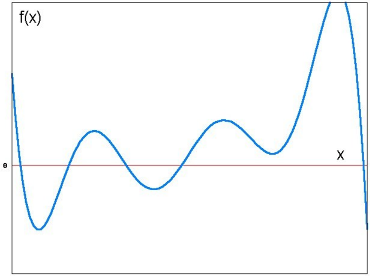
- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

- Variation des Parameters μ deformiert stetig den Graph von $f(x)$.
- Nullstellen bewegen sich dabei. Aber nicht nur:



-

Eindimensionale Dynamik: $\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$.

Beobachtungen:

- Bei Variation eines Parameters entstehen die Gleichgewichte paarweise und verschwinden ebenso paarweise:

  jedesmal wenn ein Maximum oder Minimum von $f(x, \boldsymbol{\mu})$
  Vorzeichen wechselt.
- Jedes neugeborene/verschwindende Paar besteht
  aus je einem stabilen und einem instabilen Gleichgewicht.
- Beim kritischen Parameterwert ist das System strukturell instabil:
  eine beliebig kleine Änderung von μ
  ändert das Phasenportrait qualitativ.

Solche Ereignisse werden Bifurkationen genannt.

Bifurkation (Verzweigung) –
eine qualitative Änderung der Struktur des Phasenraums, verursacht durch die Variation des Parameters (oder mehrerer Parameter).

Man spricht von lokalen und globalen Bifurkationen.

- Die lokalen Bifurkationen verändern qualitativ die Eigenschaften (Stabilität, Existenz) von einzelnen Objekten im Phasenraum:
  Fixpunkten, geschlossenen Bahnkurven usw.
- Die globalen Bifurkationen
  verändern die ganzen (invarianten) Mengen im Phasenraum:
  sie entstehen/verschwinden, kollidieren miteinander.
- Im Moment einer Bifurkation (bei kritischem Parameterwert) wird das System strukturell instabil.

Der Begriff einer Bifurkation wurde von Henri Poincaré eingeführt.

`Nous dirons alors que s'est une` *forme de bifurcation* (1885).

$$\dot{x} = f(x, \boldsymbol{\mu})$$

Mögliche qualitative Änderungen bei eindimensionalen Systemen:

(a) Ein Paar von Gleichgewichten entsteht/verschwindet.

$\Rightarrow$ ein Maximum oder Minimum von $f(x, \boldsymbol{\mu})$ wechselt Vorzeichen.

$\Rightarrow$ $\frac{d}{dx} f(x, \boldsymbol{\mu}) \,|_{x=x_*} = 0$

(b) Ein Gleichgewicht wechselt seine Stabilität.

$\Rightarrow$ Ableitung $\frac{d}{dx} f(x, \boldsymbol{\mu}) \,|_{x=x_*}$ wechselt Vorzeichen.

$\Rightarrow$ siehe Fall (a) oben.

▷ Am Bifurkationsparameterwert $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ sind zwei Bedingungen erfüllt:

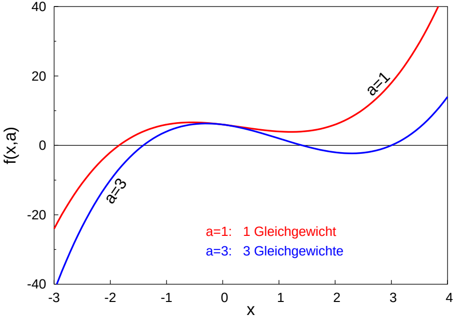
(1) $f(x_*, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = 0$ (Gleichgewicht)

(2) $\frac{d}{dx} f(x, \boldsymbol{\mu}) \,|_{x=x_*,\, \boldsymbol{\mu}=\overline{\boldsymbol{\mu}}} = 0$ (Ableitung verschwindet).

Zwei Gleichungen, zwei unbekannten $(x_*, \overline{\boldsymbol{\mu}})$ – prinzipiell lösbar!

$$\dot{x} = f(x, a)$$

$$f(x, a) = x^3 - a\,x^2 - 2x + 6$$



$$\frac{d\,f}{d\,x} = 3x^2 - 2a\,x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 + a\,x^2 - 2x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 2a\,x - 2 = 0 \end{cases}$$

- x loswerden: $\Rightarrow$ *Resultante*

  Resultante ist ein Werkzeug der Algebra, um zwei Polynome auf das Vorhandensein gemeinsamer Nullstellen zu prüfen.

z.B. **Mathematica**: Resultant $[x^3 + a\,x^2 - 2x + 6,\ 3x^2 - 2a\,x - 2,\ x]$

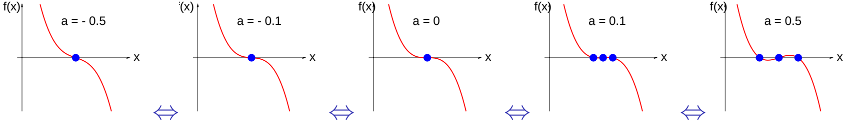
$$\underline{-24a^3 - 4a^2 - 16a + 940} = -4\,(2a - 5)\,(47 + 8a + 3a^2) = 0 \Rightarrow a = 5/2.$$

- Bifurkation findet bei $a = \dfrac{5}{2}$ statt.

Betrachten wir nun die *parameter-abhängige Schar* von DS

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = a\,x - x^3$$

bei unterschiedlichen Werten vom Parameter a.



Aus einem stabilen Gleichgewicht werden drei:
ein instabiles und zwei stabilen.

Immerhin: auch hier ändert sich die Anzahl von Gleichgewichten um 2.

Bemerkenswert: beim kritischen Parameterwert $a = 0$ gilt am Gleichgewicht nicht nur $f'(x) = 0$ sondern auch $f''(x) = 0$: ein *Wendepunkt* von $f(x)$. Das ist offensichtlich eine stärkere Entartung als zuvor.

Wir verdoppeln die Dimension des Phasenraums
und betrachten nun Dynamik von einem System zweiter Ordnung.

- Phasenraum, je nach Problemstellung:
  Ebene, Zylindermantel, Kugeloberfläche, eine andere 2D-Mannigfaltigkeit...
  Lokal reicht es, ein Stück des Phasenraums
  als ein Stück der Phasenebene zu betrachten.
- Die Reihenfolge "größer/kleiner" gibt es nicht mehr, die Trajektorien dürfen einander überholen (natürlich, ohne einander zu schneiden).
- Es bleibt allerdings eine weitere *topologische* Einschränkung:
  jede geschlossene Phasenbahn (periodische Lösung)
  teilt den Phasenraum ins *"innere"* und *"äußere"*.
  Befindet sich der Anfangspunkt der Phasentrajektorie
  im inneren einer geschlossenen Bahnkurve,
  so bleibt diese ganze Trajektorie innerhalb dieser Kurve.

Das hat weitreichende Konsequenzen für die Existenz der periodischen Lösungen, die wir später diskutieren. Heute beschränken wir uns aber auf die Eigenschaften der Gleichgewichte in 2D.

Gleichgewichte in der Phasenebene

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}. \quad \text{Gleichgewicht} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} f(x_*, y_*) = 0 \\ g(x_*, y_*) = 0 \end{pmatrix}.$$

1. Koordinatenverschiebung: Gleichgewicht $\Rightarrow$ Ursprung.

   Neue Koordinaten: $\begin{cases} x_1 = x - x_* \\ x_2 = y - y_* \end{cases}$

   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}, \text{ mit } \begin{cases} f(0,0) = 0 \\ g(0,0) = 0 \end{cases}.$$

2. Linearisierung am Gleichgewicht:

   Taylor-Entwicklung der rechten Seiten $\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial g}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_2} x_2 + O(|x^2|) \end{cases}$

   (alle partielle Ableitungen berechnet bei $x_1 = x_2 = 0$)

Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array} \right.$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

Eigenwerte λ (und damit die Stabilität quantitativ) sind nur von den Invarianten der Jacobi-Matrix abhängig: deren Spur und Determinante.

Bei Transformationen von Variablen bleiben die Eigenwerte invariant!

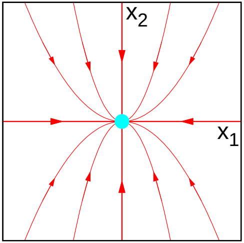
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

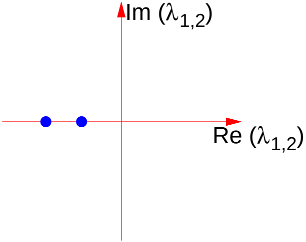
Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 reell und negativ: stabiler Knoten (stable node).





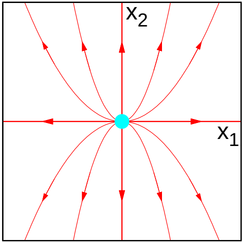
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

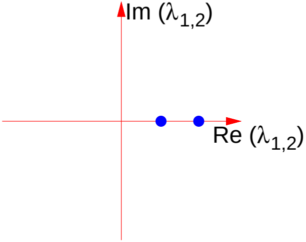
Linearisierung: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array} \right.$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 reell und positiv: instabiler Knoten (unstable node).





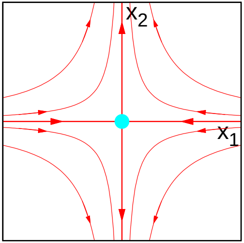
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

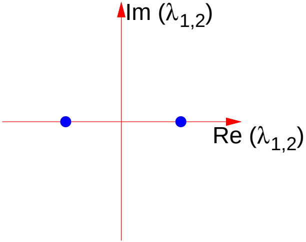
Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

- λ_1 und λ_2 reell, mit unterschiedlichen Vorzeichen: Sattel (saddle).





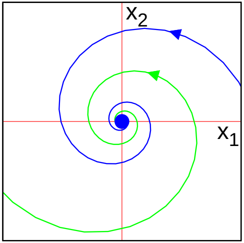
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

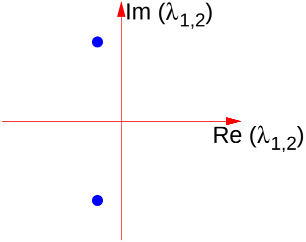
Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$: stabiler Fokus (Strudel) (stable focus).





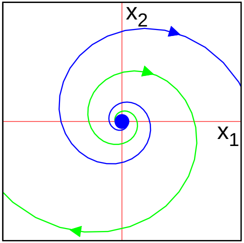
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

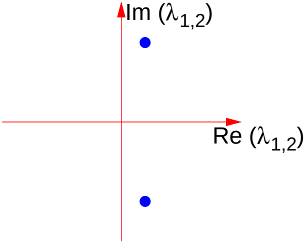
Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) > 0$: instabiler Fokus (Strudel) (unstable focus).





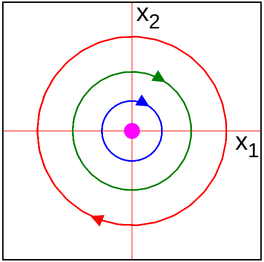
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

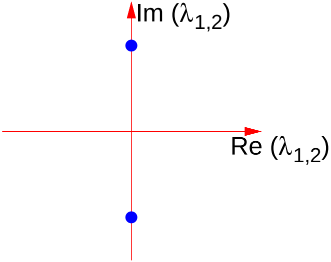
Linearisierung: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array} \right.$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

▷ λ_1 und λ_2 rein imaginär: Zentrumspunkt (center).





Vieta-Satz und Wurzel der quadratischen Gleichung:

Seien A und B die Koeffizienten der quadratischen Gleichung

$$x^2 + A\,x + B = 0$$

und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln), reell oder komplex-konjugiert. Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -A, \qquad x_1 \cdot x_2 = B.$$

Beweis: einfach $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ausmultiplizieren.

Verallgemeinerung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Wurzeln des Polynoms n.Grades
$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$.

Dann gilt $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = -a_{n-1}$,

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

und noch $n-2$ ähnliche Relationen.

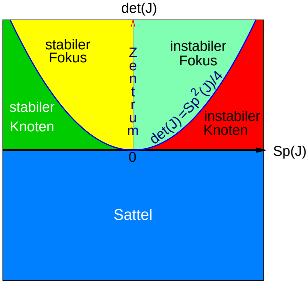
Klassifikation von Gleichgewichten in der Phasenebene

Linearisierung: $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$. Jacobian: $J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

$$\lambda^2 - \mathrm{Sp}(J)\,\lambda + \det(J) = 0$$

▷ Unter Berücksichtigung des Satzes von Vieta erfolgt die endgültige Zuordnung:



Definition: ein Gleichgewicht heißt hyperbolisch, falls
für jeden Eigenwert $\boldsymbol{\lambda}_j$ seiner Jacobi-Matrix gilt: $Re(\boldsymbol{\lambda}_j) \neq 0$.

Satz von Grobman und Hartman

In einer Umgebung eines hyperbolischen Gleichgewichts existiert eine eindeutige und umkehrbar stetige Abbildung, die die Trajektorien des nichtlinearen Systems auf die Trajektorien des linearisierten Systems abbildet.

▷ *Diese Abbildung bewahrt die Zeitrichtung und Trajektorienrichtung.*

Damit gibt die Linearisierung Aufschluss über den Aufbau des Phasenportraits in einem nichtlinearen System in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichts.

(gilt bei beliebiger Dimension des Phasenraums).