

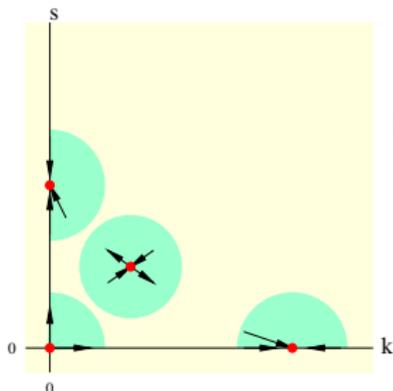
Vorlesung 5.

Zweidimensionale Dynamik: Existenz und Nicht-Existenz periodischer Lösungen





Vervollständigung

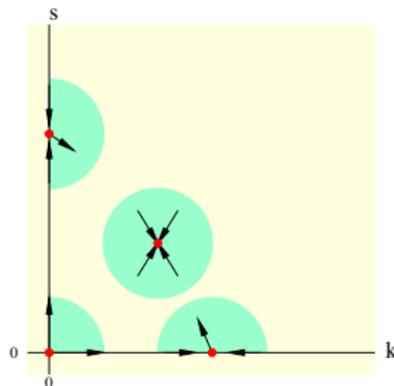


Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

Kann man aus diesen Stücken ein **globales** Gesamtbild zusammenflicken?

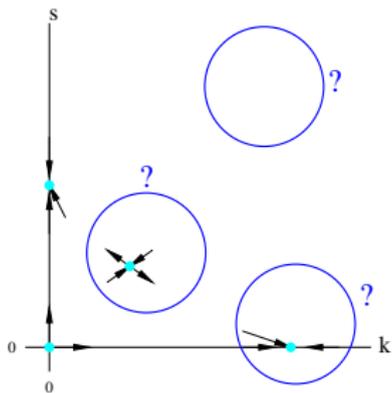
Dafür fehlt uns das Wissen, ob **geschlossene Bahnen (periodische Orbits)** in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.





Vervollständigung

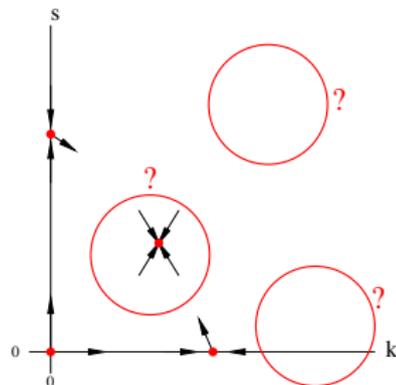


Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

Kann man aus diesen Stücken ein **globales** Gesamtbild zusammenflicken?

Dafür fehlt uns das Wissen, ob **geschlossene Bahnen (periodische Orbits)** in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.



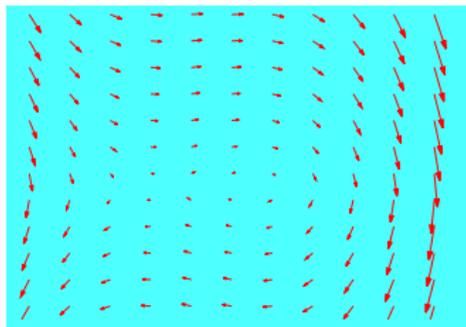


Ein autonomes dynamisches System

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

definiert im zweidimensionalen Phasenraum ein **Vektorfeld**:

jedem Punkt (x_1, x_2)
wird ein Vektor zugeordnet
mit Komponenten
 $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$.

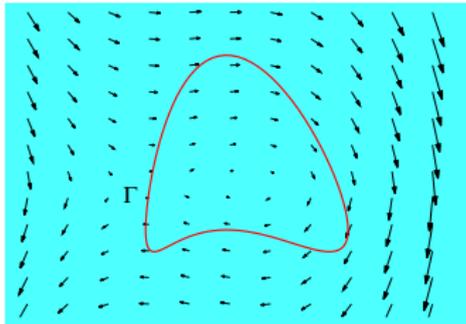


In jedem Punkt (außer Gleichgewichte) ist dieser Vektor **entlang** der Lösungskurve gerichtet, die durch diesen Punkt geht.

Richtung:
$$\varphi = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$



Nun legen wir auf die Phasenebene
eine geschlossene Kurve Γ
(nicht unbedingt eine *Bahnkurve*),
die sich selbst nicht schneidet,
und auf der **kein** Gleichgewicht liegt:



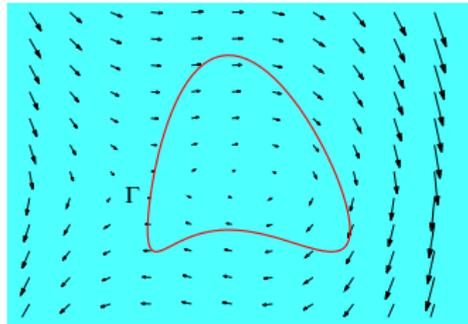
Wir wählen auf Γ einen beliebigen Anfangspunkt,
gehen einmal um Γ herum (z.B. im *Gegenuhrzeigesinn*)
und zählen die Umdrehungen des Vektorfeldes auf diesem Weg.

Die Anzahl der Umdrehungen heißt **Poincaré-Index** $I(\Gamma)$.

Der Wert von $I(\Gamma)$ ist offensichtlich **ganzzahlig**
und unabhängig vom Anfangspunkt auf Γ .



Nun legen wir auf die Phasenebene
eine geschlossene Kurve Γ
(nicht unbedingt eine *Bahnkurve*),
die sich selbst nicht schneidet,
und auf der **kein** Gleichgewicht liegt:



Berechnung

(Index als Integral: Summe infinitesimaler Drehungen entlang der Kurve)

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

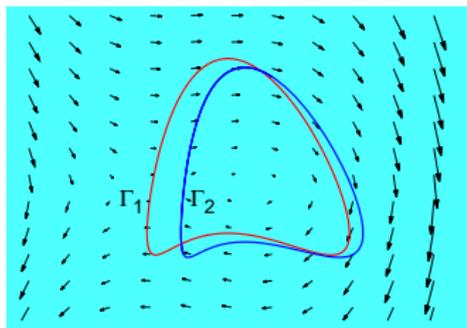
$$\text{mit } df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \quad \text{und} \quad df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2.$$

Da der Nenner $f_1^2 + f_2^2$ nirgendwo auf Γ verschwindet,
ist $I(\Gamma)$ eindeutig definiert und eine stetige Funktion von Γ .

Bei Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ dreht sich jeder Vektor um π ;
der Wert von $I(\Gamma)$ bleibt dabei invariant.



Welche Auswirkungen hat eine hinreichend kleine Verschiebung und/oder Deformation von Γ (so dass **kein Gleichgewicht berührt wird**)?



Wegen Stetigkeit darf $I(\Gamma_2)$ nur geringfügig vom $I(\Gamma_1)$ abweichen.

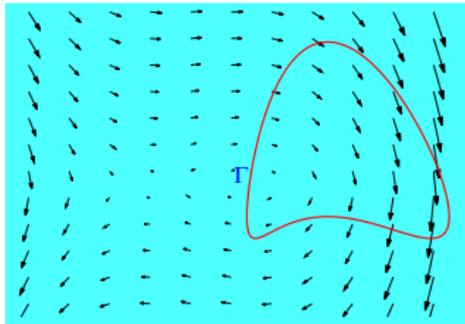
Aber eine ganzzahlige Funktion
kann man nicht „geringfügig“ ändern!

$$\Rightarrow \quad I(\Gamma_1) = I(\Gamma_2)$$

Folge: zwei beliebige (und damit alle) geschlossene Kurven, die so ineinander stetig überführt werden können, dass bei der Transformation **kein** Gleichgewicht berührt wird, haben **denselben** Wert des Indexes I .

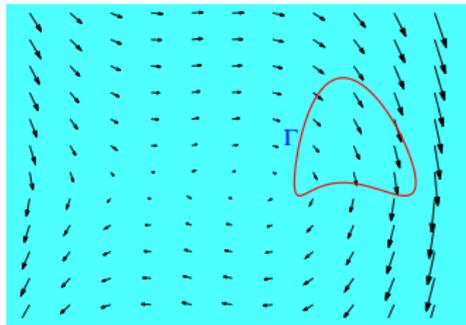


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



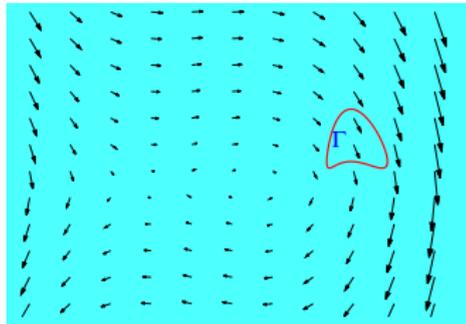


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



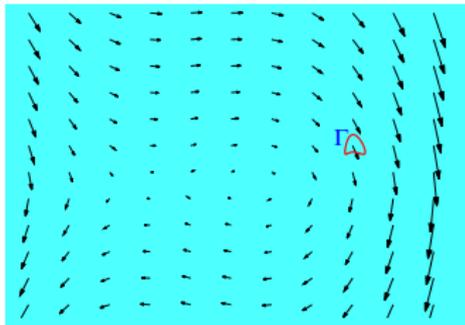


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



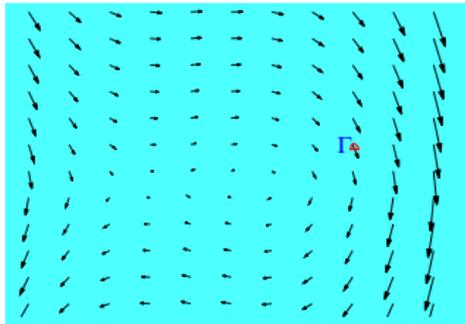


*Eine geschlossene Kurve Γ , die **keine** Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



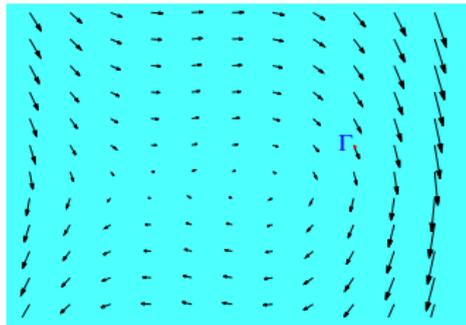


Eine geschlossene Kurve Γ , die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.





Eine geschlossene Kurve Γ , die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.



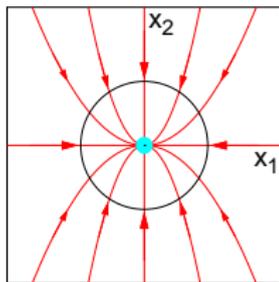
Damit wird φ entlang der (geschrumpften) Kurve konstant.

Deswegen gilt für alle solche Kurven: $I(\Gamma) = 0$.



Eine geschlossene Kurve Γ mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:

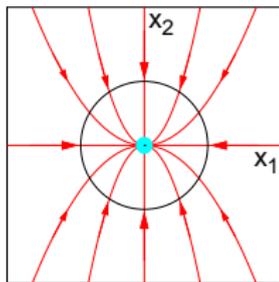


$$I(\text{Knoten})=1$$

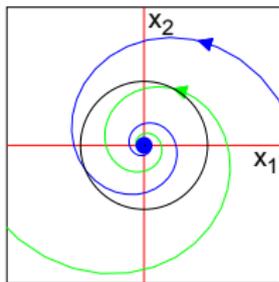


Eine geschlossene Kurve Γ mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:



$$I(\text{Knoten})=1$$

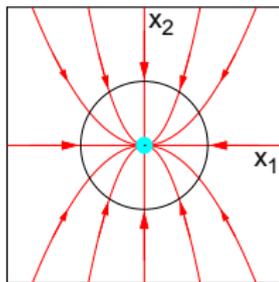


$$I(\text{Fokus})=1$$

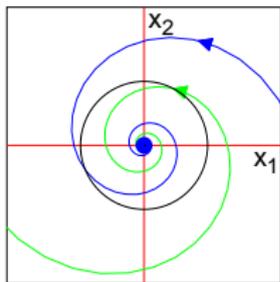


Eine geschlossene Kurve Γ mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden.

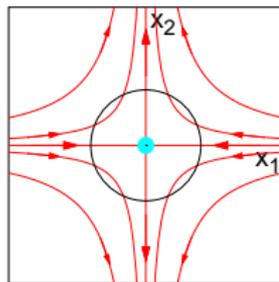
Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“. Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:



$$I(\text{Knoten})=1$$



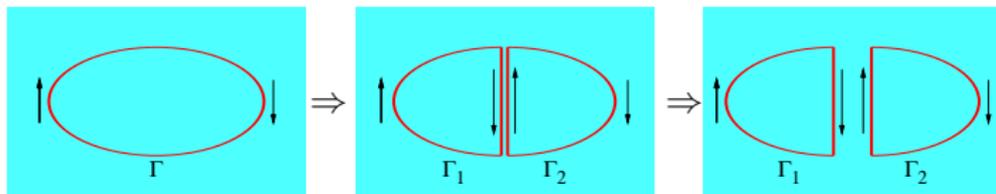
$$I(\text{Fokus})=1$$



$$I(\text{Sattel})=-1$$



A. Der Index ist additiv:



B. Deswegen ist der Index jeder geschlossenen Kurve **gleich der Summe** von Indexwerten aller Gleichgewichte in deren Inneren.

C. Betrachten wir nun eine geschlossene **Bahnkurve** (Phasentrajektorie). Da das Vektorfeld stets **entlang** der Bahn zeigt, macht es insgesamt **genau eine** Umdrehung. $\Rightarrow I(\text{Bahnkurve}) = 1$.

D. Aus B und C folgt:

innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegt mindestens ein Gleichgewicht.

Genauer:

innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegen **$2n+1$** Gleichgewichte; **n** davon sind Sattelpunkte ($n=0,1,2,\dots$).

Folge: **Periodische Trajektorien in der Phasenebene dürfen weder um einzelne Sattelpunkte herum, noch in den „leeren“ Bereichen liegen.**



Themenwechsel: Integralsatz von Gauß (zwei-dimensional):

Es seien: a) S eine kompakte Menge in der Ebene mit dem Rand Γ ,
und b) \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Feld auf dieser Ebene.

Dann gilt: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 dx_2 = \oint_{\Gamma} F_n d\Gamma$ (F_n – Normalkomponente von \mathbf{F}
auf dem Rand).

Bei einer Bahnkurve zeigt das Feld immer entlang der Bahn $\Rightarrow F_n = 0$.

Damit gilt für jede geschlossene Bahn: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 dx_2 = 0$.

Ist es wirklich selbstverständlich?

Das Integral von der Divergenz über das innere **jeder** geschlossenen Phasentrajektorie **ist identisch Null** !

Es folgt daraus ein negatives *Divergenz-Kriterium*:

*in einem Gebiet der Phasenebene,
in dem die Divergenz vom \mathbf{F} keine Nulstellen aufweist
(und damit überall dasselbe Vorzeichen hat),
können **keine** geschlossene Trajektorien liegen.*



Falls beide rechte Seiten von

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2), \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2)$$

mit einer beliebigen **positiven** Funktion $g(x_1, x_2)$ multipliziert werden:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2) g(x_1, x_2), \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2) g(x_1, x_2),$$

dann ändern sich die Vektorlängen, aber die Winkel bleiben invariant:

$$\varphi(x_1, x_2) = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2) g(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2) g(x_1, x_2)} = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Das neue Vektorfeld richtet sich weiterhin **entlang** der Bahnkurven, besitzt **keine** Normalkomponente zu den Bahnkurven,

deswegen gilt für jede geschlossene Bahnkurve:

$$\int_S \operatorname{div} \left(g(x_1, x_2) \mathbf{F}(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2 = 0.$$

(Integration auf dem ganzen Innengebiet S dieser Kurve)



Dulac-Kriterium:

Es folgt ein negatives Kriterium für periodische Lösungen:

falls in einem Gebiet $G \ni$ eine stetig differenzierbare Funktion $g(x_1, x_2)$,

so dass $\forall (x_1, x_2) \in G: \begin{cases} g(x_1, x_2) > 0 \\ \operatorname{div}(g(x_1, x_2) \mathbf{F}(x_1, x_2)) \neq 0 \end{cases}$

dann liegen in G **keine** geschlossenen Bahnkurven des dynamischen Systems \mathbf{F} .

Beispiel: Lotka-Volterra Gleichungen:

$$dx/dt = x(\alpha_1 - \beta_1 x + \kappa_1 y),$$

$$dy/dt = y(\alpha_2 - \beta_2 y + \kappa_2 x)$$

mit *positiven* Selbstbeschränkungskoeffizienten $\beta_{1,2}$ auf dem Gebiet $x, y > 0$.

Für $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ ergibt sich $\operatorname{div}(g(x, y) \mathbf{F}(x, y)) = -\frac{\beta_1}{y} - \frac{\beta_2}{x} < 0$.

\Rightarrow LV-Gleichungen haben **keine** periodische Lösungen
im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene (unabhängig von $\alpha_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$) !



Poincaré-Bendixson-Kriterium:

Ein positives Kriterium für periodische Lösungen:

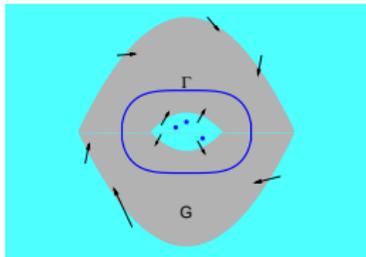
falls \exists ein Gebiet G der Phasenebene, so dass

- an dessen ganzer Grenze das Feld F „nach innen“ zeigt, und
- in G keine Gleichgewichte liegen,

dann gibt es im Inneren von G

mindestens eine **asymptotisch stabile** geschlossene Bahnkurve.

- ▷ **Bemerkung:** Da die Trajektorien G nicht verlassen, muss im Inneren von G mindestens ein Attraktor liegen, und zwar kein Gleichgewicht.



*G muss wenigstens ein „Loch“ haben:
wegen des Poincaré-Indexes muss es Gleichgewichte
im Inneren der periodischen Lösung Γ geben,
die aber nicht im Inneren von G liegen dürfen.
Deswegen ist die **Grenze von G**
nicht zusammenhängend!*



Lotka-Volterra Gleichungen:

$$dx/dt = x(\alpha_1 - \beta_1 x + \kappa_1 y),$$

$$dy/dt = y(\alpha_2 - \beta_2 y + \kappa_2 x)$$

mit **positiven** Selbstbeschränkungskoeffizienten $\beta_{1,2}$

haben **keine** periodische Lösungen im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene (unabhängig von $\alpha_{1,2}$ und $\kappa_{1,2}$).

- ▷ Die **einzig**e verbliebene Möglichkeit: **keine** Selbstbeschränkung, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$$dx/dt = x(\alpha_1 + \kappa_1 y), \quad dy/dt = y(\alpha_2 + \kappa_2 x)$$

- ▷ Nur 2 Gleichgewichte: $x = y = 0$ und $x = -\frac{\alpha_2}{\kappa_2}$, $y = -\frac{\alpha_1}{\kappa_1}$.

⇒ (α_1 und κ_1) sowie (α_2 und κ_2) haben unterschiedliche Vorzeichen.

$$\dot{x} = x(-2 + y)$$

$$\dot{y} = y(3 - x).$$

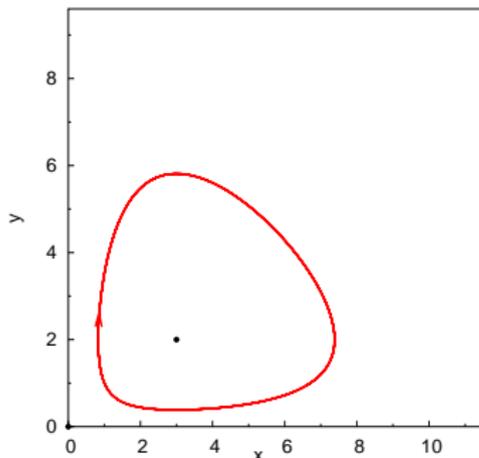
Räuber-Beute System: Räuber x stirbt schnell aus in Abwesenheit der Beute y .



$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-2 + y) \\ \dot{y} &= y(3 - x).\end{aligned}$$

Gleichgewichte: $x=y=0$ (Sattel!) und $x=3, y=2$ (Zentrumspunkt!!)

Numerisches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigersinn

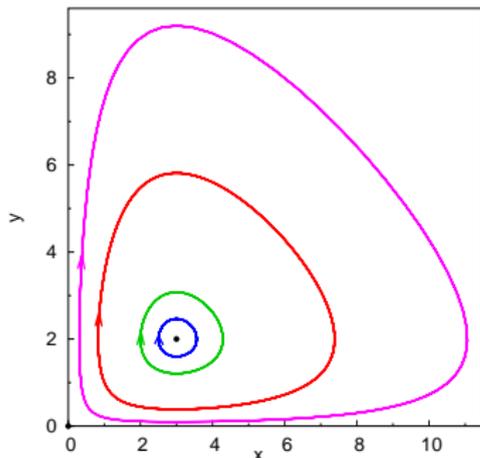




$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-2 + y) \\ \dot{y} &= y(3 - x).\end{aligned}$$

Gleichgewichte: $x=y=0$ (Sattel!) und $x=3, y=2$ (Zentrumspunkt!!)

Numerisches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigesinn



Jeder Punkt im positiven Quadrant liegt auf einer geschlossenen Phasenbahn:
Ein Kontinuum von periodischen Lösungen, mit Zentrumspunkt in der Mitte.

Maxima für Räuber x folgen den Maxima für Beute y mit Zeitverzögerung.



$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha_1 + \kappa_1 y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\alpha_2 + \kappa_2 x).$$

Gleichung der Phasenkurven:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y(\alpha_2 + \kappa_2 x)}$$

Variablentrennung:
$$\frac{dx(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \frac{dy(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y}$$

Integrieren:
$$\int \frac{dx(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \int \frac{dy(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y} + C$$

Ergebnis: Kurvengleichung $\kappa_2 x + \alpha_2 \ln x - \kappa_1 y - \alpha_1 \ln y = C$

Jedem Wert der Konstante C („Energie“?)
entspricht eine geschlossene Phasenkurve: periodische Bewegung.