

Vorlesung 6.

# Bifurkationen I: Allgemeine Überlegungen; Invariante Mannigfaltigkeiten





**Bifurkationen:** qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

**Geometrische Darstellung:** Ein dynamisches System  $N$ -ter Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im  $N$ -dimensionalen Phasenraum ein **Vektorfeld**:

jedem Punkt  $(x_1, \dots, x_N)$  wird ein  $N$ -Vektor mit Komponenten  $(F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, x_N))$  zugeordnet.

- ▷ Gesamtheit dieser Felder bildet **auch** einen Raum:

**Raum dynamischer Systeme  $N$ -ter Ordnung.**

Jeder Punkt in diesem Raum **ist** ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

Kontrollparameter werden zu Koordinaten in diesem Raum.

*(deswegen spricht man auch vom **Parameterraum**):*

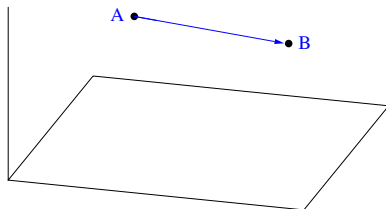
**$m$  Parameter  $\Rightarrow$   $m$ -dimensionaler Parameterraum.**

- ▷ Variation von einem/mehreren Kontrollparameter:

Bewegung durch den Parameterraum, kontinuierliche Änderung vom System.



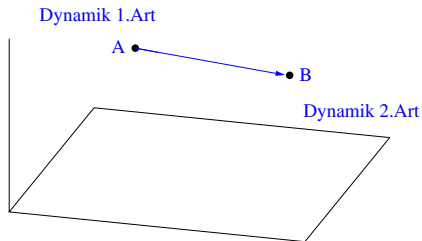
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
Keine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Jeder Pfad von  $A$  nach  $B$  ist durch **einen** Parameter parametrisierbar:  
1-param. Familie von DS



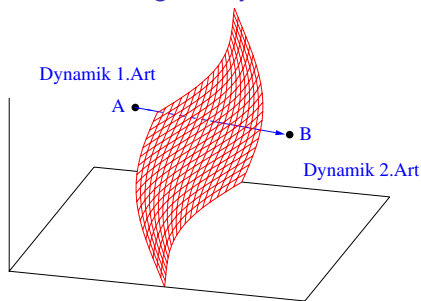
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
**Eine** qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.





Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



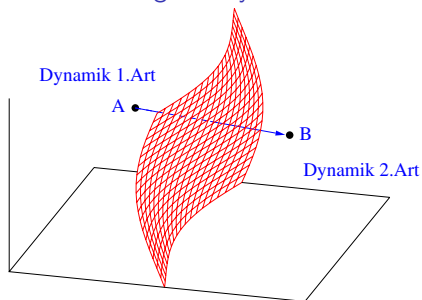
Unterwegs findet eine **Bifurkation** statt.

Gebiete mit derselben qualitativen Dynamik (*selbe Anzahl von Gleichgewichten, selbe Anzahl von positiven/negativen Eigenwerten bei jedem davon usw.*) sind  $m$ -dimensionale Objekte im  $m$ -dimensionalen Parameterraum.

- ▷ Bifurkationen finden an  $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt, die diese Gebiete voneinander trennen.



Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
**Eine** qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

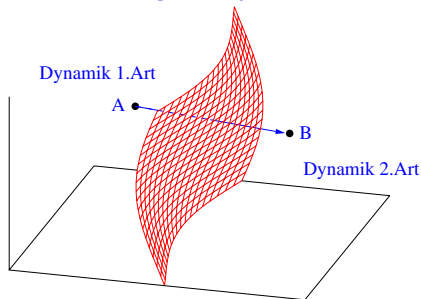


Bifurkationen finden an  $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt:

- ▷ für Systeme mit **einem** Parameter ( $m=1$ ) – in den Punkten,
- ▷ für Systeme mit **zwei** Parametern ( $m=2$ ) – auf den Linien,
- ▷ für Systeme mit **drei** Parametern ( $m=3$ ) – auf den 2D-Flächen,
- ...
- ▷ Dabei kann es in allen Fällen dieselbe Bifurkation sein  
(z.B. *Zusammenstoß und Verschwinden von zwei Gleichgewichten*)

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



Bifurkationen finden an  $(m-1)$ -dimensionalen Flächen statt.

Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- ▷ z. B. reeller Eigenwert einer Jacobi-Matrix verschwindet,
- ▷ oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, ...

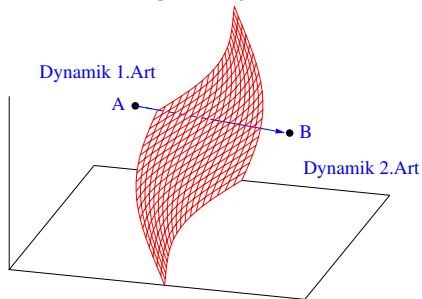
Gesamtanzahl dieser Bedingungen nennt man **Kodimension**:

Dimension, die bis zur „vollen“  $(m)$  fehlt.

*(z.B. Zusammenstoß von zwei Gleichgewichten hat Kodimension 1.)*



Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
**Eine** qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

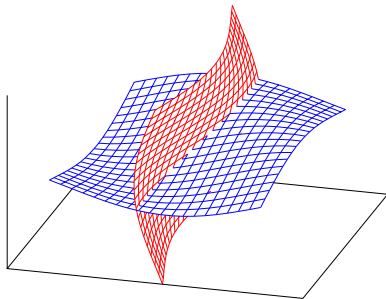


Beispiel von Bifurkation mit Kodimension 1  
(Bifurkationsfläche trennt voneinander Volumen im Parameterraum)





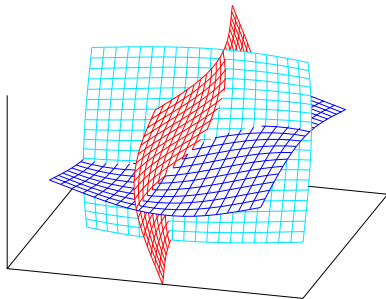
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:  
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;  
ihr gemeinsames Auftreten hat Kodimension 2:  
„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum

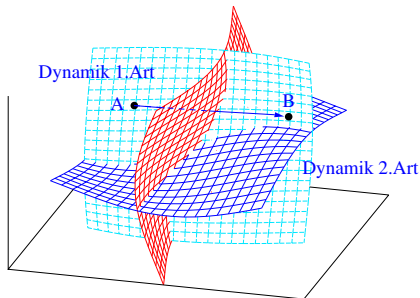


Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:  
jede Bifurkation alleine hat **Kodimension 1**;  
gemeinsames Auftreten von zwei hat **Kodimension 2**;  
gemeinsames Auftreten von allen drei hat **Kodimension 3**;  
*„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum*

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.  
**Mehrere** qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



**Drei** unterschiedliche Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat **Kodimension 1**;

gemeinsames Auftreten von zwei hat **Kodimension 2**;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat **Kodimension 3**;

„fehlende“ Dimension bei deren **Schnittmenge** im Parameterraum

**Wichtig:** Es sind in **1-parametrischen Familien** von dynamischen Systemen  
 nur Bifurkationen von **Kodimension 1** prinzipiell unvermeidbar.



## Invariante Mannigfaltigkeiten

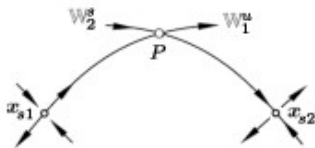
- ▷ **Stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$**  eines Gleichgewichts  $\mathbf{x}_0$ :  
Gesamtheit aller Anfangspunkten  $\mathbf{x}$  von Trajektorien,  
die bei  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mathbf{x}_0$  streben:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ .  
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht:  $W^s$  gleich Einzugsgebiet).
  - ▷ **Instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$**  eines Gleichgewichts  $\mathbf{x}_0$ :  
Gesamtheit aller Anfangspunkten  $\mathbf{x}$  von Trajektorien,  
die bei  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $\mathbf{x}_0$  streben:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ .  
(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht:  $W^u$  besteht nur aus  $\mathbf{x}_0$  selbst).
- Beide sind offensichtlich **invariant**:  
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\mathbf{x}_0$  strebt, gehört zu  $W^s$   
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $\mathbf{x}_0$  strebt, gehört zu  $W^u$ .



## Invariante Mannigfaltigkeiten

**A** und **B**: zwei **instabile** Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten ( $W^s$  von **A** und  $W^s$  von **B** **oder**  $W^u$  von **A** und  $W^u$  von **B**) **können** sich im Phasenraum **nicht** schneiden.  
(sonst wäre der *Eindeutigkeitssatz* verletzt:  
deren *Schneidepunkt* hätte 2 *Zukunften* oder 2 *Vergangenheiten*),



unmöglich !



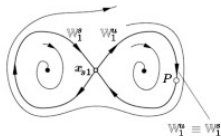
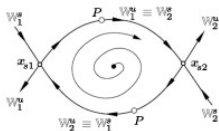
## Invariante Mannigfaltigkeiten

**A** und **B**: zwei **instabile** Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.

(sonst wäre der Eindeutigkeitsatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)

- ▷ **Unterschiedliche** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum schneiden.





## Invariante Mannigfaltigkeiten

**A** und **B**: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- ▷ **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.  
(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)
- ▷ **Unterschiedliche** Mannigfaltigkeiten von **zwei** Gleichgewichten können sich im Phasenraum schneiden.
- ▷ Eine Trajektorie  $\Gamma(t)$  vom Gleichgewicht **A** zum Gleichgewicht **B**:  
 $(\lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma(t) = \mathbf{A}, \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \mathbf{B})$   
heißt **Heterokline** (biasymptotische Trajektorie)  
heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- ▷ Eine Trajektorie  $\Gamma(t)$  von **A** nach **A**:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Gamma(t) = \mathbf{A}$   
heißt **Homokline** (biasymptotische Trajektorie)  
homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

Da eine Homokline eine geschlossene Bahn bildet,

ist sie ein Grenzfall: *periodische Bewegung mit unendlicher Periode.*

Ähnlich: Verbindung zweier Heteroklinen  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$  (heteroclinic contour)

ist ebenso eine geschlossene Bahn.



## Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir **linearisieren** die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts  $x_0$ .  
(*hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik*).

- ▷ Sei  $n$  Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht  $x_0$  mit **negativen** reellen Teilen.  
 $n$  **Eigenvektoren**, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen  $n$ -dimensionalen **linearen** Unterraum  $U^n$ .
  - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die im  $U^n$  anfängt, endet in  $x_0$ .  
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören*).
  - ▷ Jede Trajektorie **linearisierter** Gleichungen, die außerhalb  $U^n$  anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht  $x_0$ .  
(*und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit **nicht** gehören*).
- ⇒ Auch bei dem ursprünglichen **nichtlinearisierten** System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von  $x_0$ )  **$n$ -dimensional** sein.





## Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System  $N$ -er Ordnung:  $dx/dt = F(x)$ ,  $x \in \mathcal{R}^N$ ,  
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung:  $F_i(\mathbf{0}) = 0 \quad \forall i$ .

Wir teilen alle Eigenwerte  $\lambda$  von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- ▷  $n$  Eigenwerten mit  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  ( $0 \leq n \leq N$ );  
Eigenvektoren definieren einen  $n$ -dim. linearen Unterraum  $E^n$ ,
- ▷  $p$  Eigenwerten mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  ( $0 \leq p \leq N$ );  
Eigenvektoren definieren einen  $p$ -dim. linearen Unterraum  $E^p$ .

es gilt  $n + p = N$ .

- ▷ **Satz:** Stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$  des Gleichgewichts:  
a) existiert; b) hat Dimension  $n$ ; c) ist genauso glatt wie  $F$ , und  
d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum  $E^n$ .
- ▷ **Satz:** Instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$  des Gleichgewichts:  
a) existiert; b) hat Dimension  $p$ ; c) ist genauso glatt wie  $F$ , und  
d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum  $E^p$ .



## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:  
 $dx/dt = f(x, y), \quad dy/dt = g(x, y); \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$

- ▷ da  $n = p = 1$ , sind  $W^s$  und  $W^u$  beide 1-dimensional (kurvenförmig).  
Wo liegen sie in der Phasenebene?
- ▷ z.B. stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$ :  
eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,  
der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- ▷ Als eine Linie, kann  $W^s$  (lokal !) durch eine Koordinate parametrisiert werden,  
z.B. durch  $x$ :  $y = h(x)$  mit unbekannter Fkn.  $h(x)$

- ▷ Substitution in die 2.Gleichung + Kettenregel ergeben

$$h'(x)f(x, h(x)) = g(x, h(x)),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion  $h(x)$ .

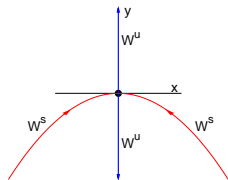
- ▷ Explizit ist diese Gleichung meist nicht lösbar,  
aber sukzessiv kann man  $h(x)$  durch die Potenzreihe bestimmen.



## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- ▷ Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: 1 and  $-1$ . Eigenvektoren: Achsen.
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$  tangiert im Ursprung die  $x$ -Achse.  
Instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$  tangiert im Ursprung die  $y$ -Achse.
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit:  $y = h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$   
(Lage vom Gleichgewicht:  $a_0 = 0$ , Richtung vom Eigenvektor:  $a_1 = 0$ ).
- ▷ Einsetzen in  $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- ▷  $\Rightarrow a_2 = -1/3, a_3 = a_4 = \dots = 0$
- ▷ Stabile Mannigfaltigkeit:  $y = -\frac{x^2}{3}$ .
- ▷ Instabile Mannigfaltigkeit (in diesem Fall trivial):  $y$ -Achse  $x = 0$ .





## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

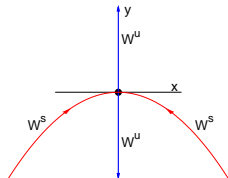
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- ▶ Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: 1 and  $-1$ . Eigenvektoren: Achsen.
- ▶ Stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$  tangiert im Ursprung die  $x$ -Achse.  
Instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$  tangiert im Ursprung die  $y$ -Achse.
- ▶ Stabile Mannigfaltigkeit:  $y = h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$   
(Lage vom Gleichgewicht:  $a_0 = 0$ , Richtung vom Eigenvektor:  $a_1 = 0$ ).

▶ Einsetzen in  $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$

▶  $\Rightarrow a_2 = -1/3, a_3 = a_4 = \dots = 0$

▶ Stabile Mannigfaltigkeit:  $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{x^5}{81} - \frac{x^8}{729} \dots$



▶ Instabile Mannigfaltigkeit:  $x = 0 + \frac{y^2}{3} - \frac{y^5}{81} + \frac{y^8}{729} \dots$