Vorlesung 9

Bifurkationen IV:

Bifurkationen von Gleichgewichten. Imperfekte Bifurkationen. Andronov-Hopf Bifurkation.

A. Jacobi-Matrix: Reeller Eigenwert 0 (Wiederholung)

Eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit: $dx/dt = f(x, \mu)$.

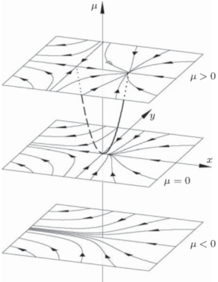
Gleichgewicht x_0: $f(x_0, \mu) = 0$;
dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f/\partial x|_{x=x_0}$.

Bifurkationsbedingung: $f(0,0) = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0.$

(Bifurkation bei $\mu = 0$ und Gleichgewicht in x=0)

Taylor: $dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \ldots$

▷ $a_0 \neq 0 \;\Rightarrow$ Sattel-Knoten-Bifurkation (auch Falte, fold genannt)



A. Jacobi-Matrix: Reeller Eigenwert 0

Eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit: $dx/dt = f(x,\mu)$.

Gleichgewicht x_0: $f(x_0,\mu) = 0$;
dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f/\partial x|_{x=x_0}$.

Bifurkationsbedingung: $f(0,0) = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0.$

(Bifurkation bei $\mu = 0$ und Gleichgewicht in x=0)

Taylor: $dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \ldots$

- ▷ $a_0 \neq 0 \;\Rightarrow$ Sattel-Knoten-Bifurkation (auch Falte, fold genannt)
- ▷ $a_0 = 0 \;\Rightarrow$ Transkritische Bifurkation
- ▷ $a_0 = 0$ und $a_2 = 0 \;\Rightarrow$ Heugabel-Bifurkation
- ▷ Im allgemeinen Fall ist die Taylor-Reihe vollständig: Abwesenheit von bestimmten Summanden weist auf eine Entartung hin.

  Streng genommen *(mikroskopisch)* ist eine räumliche Symmetrie nie perfekt.

  Aufhebung *(unfolding)* der Entartung: $a_{0,1,2} \longrightarrow \varepsilon$.

Aufhebung von Entartungen in Normalformen

Lokalitätsprinzip: bei $|\mu| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon=0$.

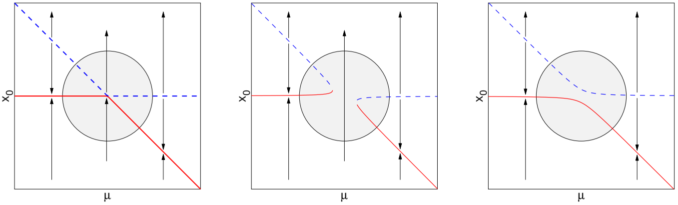
Transkritische Bifurkation: $dx/dt = f(x) = \varepsilon + \mu x + x^2$.

$$x_0 = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\varepsilon}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \pm\sqrt{\mu^2 - 4\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$: Zwei Sattel-Knoten-Bifurkationen bei $\mu = \pm 2\sqrt{\varepsilon}$;
keine Gleichgewichte dazwischen

$\varepsilon < 0$: keine (!) Bifurkationen (da $\mu^2 - 4\varepsilon$ always positive)

$\varepsilon = 0$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$ $\qquad$ $\varepsilon < 0$



Aufhebung von Entartungen in Normalformen.

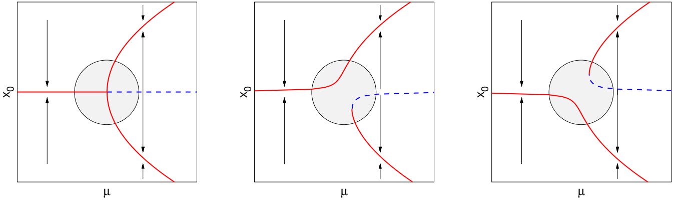
Lokalitätsprinzip: bei $|\mu| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon=0$.

Heugabel-Bifurkation: $dx/dt = f(x) = \varepsilon + \mu x - x^3$

Graphische Lösung fürs Bifurkationsdiagramm: $\mu = x_0^2 - \frac{\varepsilon}{x_0}$

Einzige Sattel-Knoten-Bifurkation bei $\mu = 3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3}$

$\varepsilon = 0$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$ $\qquad$ $\varepsilon < 0$



Hauptzweig merkt überhaupt nichts von der Bifurkation

Aufhebung von Entartungen in Normalformen.

Lokalitätsprinzip: bei $|\mu| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon{=}0$.

Heugabel-Bifurkation: $dx/dt = f(x) = +\mu\, x + \varepsilon x^2 - x^3$
(aus der Hausaufgabe)

B. Jacobi-Matrix: Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, i\,\omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional.

$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx/dt &= L_x(x,y) + N_{2x}(x,y) + N_{3x}(x,y) + N_{4x}(x,y) + \dots \\ dy/dt &= L_y(x,y) + N_{2y}(x,y) + N_{3y}(x,y) + N_{4y}(x,y) + \dots \end{aligned}$$

mit den linearen L_x, L_y und den Formen j-er Ordnung N_{jx}, N_{jy}.

- Wir ordnen *Eigenwerte der Jacobi-Matrix*: $\lambda_1 = i\,\omega$, $\lambda_2 = -i\,\omega$, $\lambda_3, \dots, \lambda_N$.
  Dann für $2 < j < N$ und ein beliebiges ganzes K gilt:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \lambda_i, \text{ mit } m_1 = m_2 = K \text{ und } m_i = \delta_{ij}\ \forall\, i > 2.$$

- Damit ist $\sum_{i=1}^{N} m_i = 2K+1$: Resonanz der Ordnung $2K+1$.
- Folge *(Poincaré)*: Summanden mit ungeraden (Summen von den) Potenzen von x und y lassen sich aus den Gleichungen nicht wegtransformieren.
- Aber alle Summanden mit geraden Summen von den Potenzen (angefangen von 2) können sukzessiv eliminiert werden.

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, \mathrm{i}\, \omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional
$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen.

▷ Normalform reduziert sich auf:

$$dx/dt = \mu\, x - \omega\, y \mp x\,(x^2 + y^2)$$
$$dy/dt = \omega\, x + \mu\, y \mp y\,(x^2 + y^2)$$

(Summanden 2.Ordnung und teilweise 3.Ordnung werden durch Koordinatentransformation eliminiert).

Bemerkenswert: Normalform besitzt die *Rotationssymmetrie*

(obwohl die ursprünglichen Gleichungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit sie nicht unbedingt hatten).

▷ Jacobian des Gleichgewichts im Ursprung: $\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\,\omega$.

Gleichgewicht: ein Strudel, stabil bei $\mu < 0$ und instabil bei $\mu > 0$.

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, i\, \omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional
$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen.

- Normalform reduziert sich auf:

$$dx/dt \; = \; \mu\, x - \omega\, y \; \mp x\,(x^2 + y^2)$$
$$dy/dt \; = \; \omega\, x + \mu\, y \; \mp y\,(x^2 + y^2)$$

(Summanden 2.Ordnung und teilweise 3.Ordnung werden durch Koordinatentransformation eliminiert).

Bemerkenswert: Normalform besitzt die *Rotationssymmetrie*
(obwohl die ursprünglichen Gleichungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit sie nicht unbedingt hatten).

- Übergang zu Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \quad (r \geq 0)$.
Dann $dr/dt = (\dot{x}x + \dot{y}y)/r$, und $d\varphi/dt = (\dot{y}x - \dot{x}y)/r^2$, also

$$\dot{r} = \mu r \mp r^3$$
$$\dot{\varphi} = \omega$$

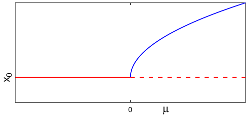
B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm$ i ω

$$\dot{r} = \mu r \mp r^3$$
$$\dot{\varphi} = \omega$$

- Koordinaten sind „abgekoppelt“:
  aus dem System werden zwei getrennte Gleichungen.

- Gleichung für φ ergibt explizit: $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$
  – eine Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω

- Gleichung für r – Normalform der Heugabel
  (ohne dem negativen Ast)



- Konstanter Wert von r, gleichmäßige Drehung entlang φ
  – periodische Bewegung entlang einer runden Phasenbahn.

Im Fall von $-r^3$ in der 1.Gleichung wird diese Bahn asymptotisch stabil
$\Rightarrow$ Grenzzyklus (limit cycle)

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerten $\pm$ i ω

Somit führt diese Art von Stabilitätsverlust bei einem Gleichgewicht zum Einsetzen von einer qualitativ anderen Form von Dynamik:

- aus dem Gleichgewicht entstehen periodische Schwingungen,
  die Amplitude wächst als $\sim \sqrt{\mu}$,
  und die Periode ist annähernd $2\pi/\omega$.

- Dieser Übergang heißt Andronov-Hopf Bifurkation:
  A.A. Andronov hat sie für zweidimensionale Systeme beschrieben (1929),
  E.Hopf behandelte den allgemeinen Fall für ein System mit Ordnung n (1942).

- Abhängig vom Vorzeichen vor r^3, kann diese Bifurkation

  „weich“/superkritisch (stabile Schwingungen)

  oder „hart“/subkritisch (instabile Schwingungen) sein.

- Seien x, y Koordinaten auf der Zentrumsmannigfaltigkeit des Gleichgewichts:

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \dot{y} = g(x, y, \mu), \quad f(0, 0, \mu) = g(0, 0, \mu) = 0,$$

und es $\exists$ ein reelles ω, so dass bei $\mu{=}0$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x=y=0} \quad \text{die Form} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat.}$$

Sei, außerdem, $\dfrac{\partial}{\partial \mu}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\right) \neq 0$ *(Bifurkationsbedingung)*.

- Dann zweigt sich bei $\mu{=}0$ eine periodische Lösung vom Gleichgewicht ab.

Ist $$Q = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$$

negativ, dann ist die periodische Lösung stabil (superkritische Bifurkation).

Ist Q positiv, dann ist diese Lösung instabil (subkritische Bifurkation).

Henri Poincaré

1892

Alexandr Andronov

1929

Eberhard Hopf

1942

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER
SÄCHSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
XCIV. BAND
SITZUNG VOM 19. JANUAR 1942

Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems.

1. Einleitung.

Es sei

$$\dot{x}_i = F_i\,(x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{x}, \mu) \tag{1. 1}$$

ein reelles Differentialsystem mit reellem Parameter μ. $\mathfrak{F}$ sei analytisch in $\mathfrak{x}$ und μ, wenn $\mathfrak{x}$ in einem Gebiete G liegt und $|\,\mu\,| < c$ ist. (1. 1) soll eine für $|\,\mu\,| < c$ analytische Schar stationärer Lösungen $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}\,(\mu)$ in G besitzen,

$$\mathfrak{F}\,(\bar{\mathfrak{x}}\,(\mu), \mu) = 0\,.$$

Die charakteristischen Exponenten der stationären Lösung sind bekanntlich die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe

$$\lambda\,\mathfrak{a} = \mathfrak{L}_\mu\,(\mathfrak{a}),$$

wo $\mathfrak{L}_\mu$ den nur von μ abhängigen linearen Operator bedeutet, welcher durch Weglassen der nicht linearen Glieder in der Reihenentwicklung von $\mathfrak{F}$ um $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ entsteht. Die Exponenten sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex und hängen von μ ab.

Satz. *Für $\mu = 0$ seien genau zwei charakteristische Exponenten rein imaginär. Ihre stetigen Fortsetzungen $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$ mögen den Bedingungen*

$$\alpha(0) = -\bar{\alpha}(0) \neq 0, \quad \Re(\alpha'(0)) \neq 0 \tag{1.2}$$

genügen. Dann existiert eine Schar reeller periodischer Lösungen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften $\mu(0) = 0$ und $\mathfrak{x}(t, 0) = \bar{\mathfrak{x}}(0)$, aber $\mathfrak{x}(t, \varepsilon) \neq \bar{\mathfrak{x}}(\mu(\varepsilon))$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \neq 0$. $\mu(\varepsilon)$ und $\mathfrak{x}(t, \varepsilon)$ sind an der Stelle $\varepsilon = 0$ bzw. an jeder Stelle $(t, 0)$ analytisch. Dasselbe gilt von der Periode $T(\varepsilon)$, und es ist

$$T(0) = \frac{2\pi}{|\alpha(0)|}.$$

Zu beliebig großem L gibt es zwei positive Zahlen a und b derart, daß für $|\mu| < b$ außer der stationären Lösung und den Lösungen der Scharhälfte $\varepsilon > 0$ keine periodischen Lösungen existieren, deren Periode kleiner als L ist, und die ganz in $|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}(\mu)| < a$ liegen.[1]) *Die periodischen Lösungen existieren bei hinreichend kleinem μ entweder nur für $\mu > 0$ oder nur für $\mu < 0$ (Allgemeiner Fall), oder aber nur für $\mu = 0$.*


Obwohl mir die Behandlung der Abzweigungsaufgabe auf Grund der Voraussetzung (1.2) in der Literatur nicht begegnet ist, glaube ich kaum, dass an dem obigen Satz etwas wesentlich Neues ist.

Die Methoden sind vom Poincaré vor etwa 50 Jahren entwickelt worden und gehören heute zum klassischen Gedankengut der Theorie der periodischen Lösungen im Kleinen.

Da aber der Satz von Interesse in der nichtkonservativen Mechanik ist, schien mir eine ausführliche Darstellung nicht unnütz zu sein.