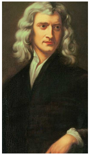
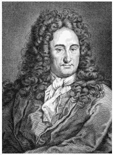
Vorlesung 1.

Nichtlineare Dynamik: Grundbegriffe und Terminologie

 $\Longrightarrow$  $\Longrightarrow$ 

Am 24.10.1676 schreibt Isaac Newton an Gottfried Wilhelm Leibniz

(über Henry Oldenburg, Secretary of the Royal Society):

6a c c d æ 13e f f 7i 3l 9n 4o 4q r r 4s 8t 12u x

Entziffert: *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa*

Englisch: *Given an equation involving any number of fluent quantities to find the fluxions, and vice versa.*

Fluenten: Funktionen der Zeit; *Fluxionen*: Ableitungen nach der Zeit.

$\underline{\textit{fluentes} \ldots \textit{involvente, fluxiones invenire}} \quad \equiv \quad$ Differentialrechnung.

$\underline{\textit{vice versa}} \quad \equiv \quad$ ***Differentialgleichungen***.

Laut der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen,
um eine gewöhnliche DGL n.-Ordnung

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)} x}{dt^{n-1}}, t\right) \quad \text{zu lösen,}$$

brauchen wir einen Satz von n Anfangswerten:

$$x(t_0), \frac{dx}{dt}(t_0), \frac{d^2 x}{dt^2}(t_0), \ldots, \frac{d^{(n-1)} x}{dt^{n-1}}(t_0).$$

Eine allgemeine Lösung enthält dann n Integrationskonstanten.

Ändert man einen Anfangswert (oder mehrere), so ändert sich auch die Lösung.

Die Änderungen können rein quantitativ sein, aber manchmal auch qualitativ: zB bei manchen Sätzen von Anfangswerten strebt die Lösung gegen eine Konstante, bei den anderen Sätzen hingegen oszilliert sie als Funktion von t.

Praktische Frage: *wie viele Sätze von Anfangswerten braucht man auszuprobieren, um die typischen Merkmale der Lösung zu erkennen?*

Uns interessieren die *allgemeinen* qualitative Eigenschaften,
die allen (oder großen Gruppen) Lösungen gemeinsam sind.

Das wird oft als *Qualitative Theorie der Differentialgleichungen* bezeichnet.

Praktischer Trick: Eine Differentialgleichung n.-Ordnung,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}}, t\right) \qquad (*)$$

kann in ein System von n Gleichungen erster Ordnung umgewandelt werden:

Wir führen n neuen Variablen ein: $x_1(t) \equiv x(t)$,

$$x_2(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \qquad \text{für } 2 < k < n\text{:} \quad x_k(t) \equiv \frac{d^{(k-1)}x}{dt^{k-1}}, \quad \ldots$$

und schließlich
$$x_n(t) \equiv \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}}.$$

Damit haben wir ein System aus n Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_k}{dt} = x_{k+1} \quad (k < n),$$
$$\frac{dx_n}{dt} = F(x_1,\ x_2\ \ldots, x_n,\ t)$$

das der ursprünglichen Einzelgleichung (*) äquivalent ist.

Ein dynamisches System setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen:

1) Dynamische Variablen: Ein Satz von Größen,
der den Systemzustand zu jedem Zeitpunkt
vollständig charakterisiert;

2) Evolutionsoperator: eine Regel, die es erlaubt,
die Werte von allen dynamischen Variablen zu jedem späteren
Zeitpunkt aus deren Anfangssatz eindeutig zu bestimmen.

▷ *Beispiel einer solchen Regel:*
ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) \quad \textit{oder} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

→ *nicht-autonomes* *oder* *autonomes*
dynamische Systeme

Jedem Punkt des $\overbrace{\textit{Phasenraumes}}^{?}$ $\boldsymbol{x}$ *wird durch dynamisches System*
ein Vektor der rechten Seiten zugeordnet.
Gesamtheit dieser Vektoren: ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Diskretisierungsstufen und Typen von Dynamischen Systemen

1 Kontinuierlicher Raum, kont. Zeit, kont. Observablen.
Beispiel: Temperaturfeld im Raum wo ich sitze: $T(\boldsymbol{r}, t)$.

Dynamische Systeme: partielle Differentialgleichungen.

2 Diskreter Raum, kont. Zeit, kont. Observablen.
Beispiel: Temperaturwert im gegebenen Raumpunkt $T(t)$.

D.S.: gewöhnliche Differentialgleichungen.

3 Diskreter Raum, diskrete Zeit, kont. Observablen.
Beispiel: Temperaturmesswert T_n *am Mittag 21.10.* n*.Jahres.*

D.S.: Abbildungen (rekurrente Sequenzen) $\boldsymbol{x}_{n+1} = f(\boldsymbol{x}_n)$.

4 Diskreter Raum, diskrete Zeit, diskrete Observablen.

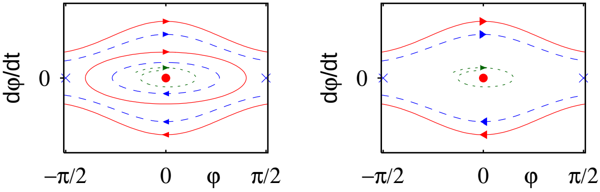
D.S.: Symbolische Dynamik: $ABBABAABBAABAB\ldots$

- **Phasenraum**:
  Gesamtheit von allen Werten von allen dynamischen Variablen.
  N Variablen $\rightarrow$ N-dimensionaler Phasenraum.

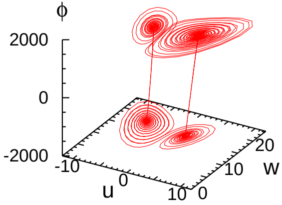
  Instantaner Zustand des Systems: Punkt im Phasenraum.
- **Phasentrajektorie** (Bahnkurve, Lösungskurve, Orbit):
  Menge von Punkten im Phasenraum,
  die der Zeitentwicklung von einem Anfangszustand entspricht.
- Phasentrajektorien können sich nicht schneiden.

  Dynamische Zustände und entsprechende Trajektorien:
- Gleichgewicht, Ruhelage: Fixpunkt.
- Periodischer Prozess (Schwingungen): geschlossene Bahnkurve.
- Schwebung, Schwingung mit 2 Frequenzen:
  Oberfläche eines 2-dimensionalen Torus.
- Ungeordnete, irreguläre Schwingungen: ? ? ?

Phasenportrait:
geometrische Darstellung typischer Trajektorien im Phasenraum.



- ▷ Zeitverlauf wird nicht angezeigt:
  es ist nur eine aus vielen möglichen Parametrisierungen entlang der Bahn
- ▷ $N > 2 \implies$ Projektionen



Zwei Klassen von dynamischen Systemen:

- Konservative Systeme besitzen Invariante.
  (klassisches Beispiel: Gesamtenergie von mechanischen Systemen
  in Abwesenheit von Reibung)
- Dissipative Systeme: wird ein dissipatives System sich selbst überlassen,
  so entsteht nach und nach ein Zustand,
  der die Abhängigkeit vom Ausgangszustand (asymptotisch) verliert:
  Anfangszustände aus einer Menge mit positivem Maß
  münden in denselben Endprozess.
- Attraktor: Menge von Punkten im Phasenraum,
  die einem dieser Endprozesse entsprechen.
- Menge von Anfangsbedingungen im Phasenraum, die zu einem Attraktor
  führen, sind sein Einzugsgebiet *(basin of attraction)*.
- Arten von Attraktoren: stabiles Gleichgewicht,
  stabile geschlossene Bahnkurve (Grenzzyklus),
  seltsamer chaotischer Attraktor (nicht eine einzelne Bahn,
  sondern eine Menge von unendlich vielen Bahnen)

Evolution von Volumen im Phasenraum

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \longleftrightarrow \quad \dot{x}_i = f_i(x_i),\ i = 1, \ldots, N,$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: Vektor(feld) der rechten Seiten.
- Gegeben: ein (kleiner) Quader mit Seitenlängen $a_1, a_2, \ldots, a_N$
  und Volumen $V = a_1 a_2 \ldots a_N$.
- $dV/dt = \dot{a}_1 a_2 \ldots a_N + a_1 \dot{a}_2 \ldots a_N + \ldots + a_1 a_2 \ldots \dot{a}_N$
  $$= V\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \ldots + \frac{\dot{a}_N}{a_N}\right)$$
- Evolution der Kantenlänge:
  $$\dot{a}_j = \frac{d}{dt}(a_j^{\text{rechts}} - a_j^{\text{links}}) \equiv (\dot{a}_j^{\text{r}} - \dot{a}_j^{\text{l}})$$
  $$= \left(\dot{a}_j^{\text{l}} + a_j \left.\frac{d\dot{a}_j^{\text{l}}}{dx_j}\right|_{x_j = a_j^l} + O(a_j^2)\right) - \dot{a}_j^{\text{l}} = a_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} + O(a_j^2) = a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + O(a_j^2)$$
- $$\frac{dV}{dt} = V \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = V \operatorname{div} \boldsymbol{f}$$

Beispiel: hamiltonsche Dynamik

- $H = H(q_1, ..., q_N, p_1, .., p_N)$.
- Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ und $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$
- $$\frac{dV}{dt} = V \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = V \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$
- $\Rightarrow$ Phasenvolumen bei den hamiltonschen Systemen bleibt erhalten (Satz von Joseph Liouville).

Andere Beispiele:

- $\begin{cases} dx_1/dt = & -3x_1 + \sin x_2 \\ dx_2/dt = & -5\exp(3x_1) + 2x_2 \end{cases}$ $\quad \mathrm{div}\boldsymbol{f} = -3 + 2 = -1 < 0$
  $\Rightarrow \; V(t) \to 0.$
- $\begin{cases} dx_1/dt = & 3x_1 + \sin x_2 \\ dx_2/dt = & -5\exp(3x_1) + 2x_2 \end{cases}$ $\quad \mathrm{div}\boldsymbol{f} = 3 + 2 = 5 > 0$
  $\Rightarrow \; V(t) \to \infty.$
- Was bedeutet das Schrumpfen (Anschwellen) vom Phasenvolumen?
  Zustandsdichte wird mit der Zeit immer größer (immer kleiner).
  Das schrumpfende Phasenvolumen entspricht
  den dissipativen Systemen.
  Mehr davon später...

Pierre-Simon Laplace (1814):

"We may regard the present state of the universe
as the effect of its past and the cause of its future.

Une intelligence qui, à un instant donné,
connaîtrait toutes les forces dont la nature
est animé et la situation respective des êtres
qui la compose embrasserait dans la même formule les mouvements
des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome;
rien ne serait incertain pour elle,
et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux."

Pierre-Simon Laplace (1814):

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt.

Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt,
mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde,
die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre,
diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen,
würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper
und die des leichtesten Atoms einbegreifen.
Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar
vor ihren Augen.“

Ist alles tatsächlich so gut und zuverlässig berechenbar?
Nehmen wir uns ein einfaches System, eine *Abbildung* des Intervalls [0 : 1]:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n < 1/2 \qquad \text{(Verdopplung)} \\ 2x_n - 1, & 1/2 \le x_n \le 1 \qquad \text{(Verdopplung und Verschiebung)} \end{cases}$$

Wo muß „eine Intelligenz“ z.B. den Anfangspunkt x_0 setzen,
um nach 60 Iterationen sich in der linken Hälfte des Intervalls zu finden?

Das berechnet uns (ohne extra Vorkehrungen) auch kein moderner Computer.

Wird eine Zahl x zwischen 0 und 1 als binärer Bruch dargestellt:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad \text{mit } a_j = 0, 1,$$

so wird die Lage im Intervall (rechts oder links von $1/2$)
lediglich durch a_1 bestimmt.

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; 0 < x < 1/2, \qquad\qquad a_1 = 1 \;\Rightarrow\; 1/2 \le x < 1.$$

Nehmen wir uns ein einfaches System, eine Abbildung des Intervalls $[0:1]$:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Iteration der Abbildung von $x_0 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ in der binären Darstellung:

$$2x_0 = 2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \ldots\right) = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{8} + \ldots \ = a_1 + \ \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}.$$

  Der erste Summand verschwindet bei der Iteration immer:
  falls $a_1 = 0$, ist es sofort 0,
  und falls $a_1 = 1$, wegen der zweiten Zeile (1 wird abgezogen).

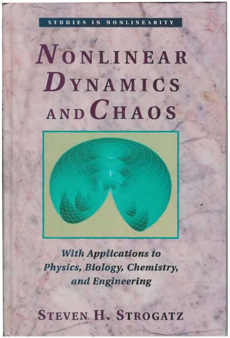
- Eine Iteration der Abbildung wird aus dieser Sicht zur Verschiebung nach links:

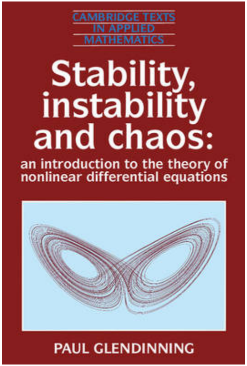
$$\{a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\} \ \Rightarrow \{a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots\} \ \Rightarrow \{a_3, a_4, a_5, a_6 \ldots\} \ \Rightarrow \ \ldots$$

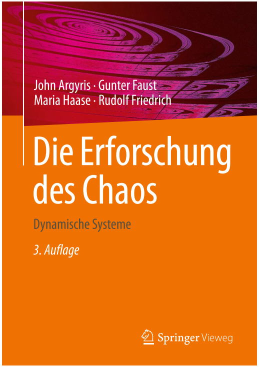
- Damit wird die Lage im Intervall nach 60 Iterationen einzig und allein durch die 61. Stelle in der Binärdarstellung vom Anfangswert x_0 bestimmt.
- Aber die Rechner haben nur 52 bits für die Darstellung von „langen" Zahlen!

"Une intelligence" gerät in Schwierigkeiten...

- Stabilität: Arten und Kriterien.
- Ein- und zweidimensionale Dynamik.
- Populationsdynamik. Lotka-Volterra Gleichungen.
- Schwingungen: Kriterien für Existenz/Nicht-Existenz.
- Übergänge zwischen dynamischen Zuständen: *Bifurkationen*.
- Periodische Schwingungen. Relaxationsschwingungen.
- Einfache Modelle der Neurodynamik. Anregbarkeit.
- Stabilität der periodischen Schwingungen. Poincare-Abbildung.
- Einführung in die fraktale Geometrie.
- Lorenz-Gleichungen. Chaotischer *Attraktor*.
- Allgemeine Eigenschaften chaotischer Dynamik. Lyapunov-Exponenten.
- Universelle Szenarien vom Übergang zum Chaos. Perioden-Verdopplungssequenz.
- Quasiperiodizität. *Synchronisation*.
- Hamiltonsche Dynamik: Chaos ohne Attraktoren.


STUDIES IN NONLINEARITY
NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS
With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering
STEVEN H. STROGATZ


CAMBRIDGE TEXTS IN APPLIED MATHEMATICS
Stability, instability and chaos:
an introduction to the theory of nonlinear differential equations
PAUL GLENDINNING


John Argyris · Gunter Faust
Maria Haase · Rudolf Friedrich
Die Erforschung des Chaos
Dynamische Systeme
3. Auflage
Springer Vieweg