Vorlesung 12.

Stabilität periodischer Lösungen.

Floquet-Theorie. Poincaré-Abbildung.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{x} \in R^N, \quad N \geq 2.$$

Periodische Lösung mit Periodendauer T: $\quad \boldsymbol{x}^{(p)}(t) = \boldsymbol{x}^{(p)}(t+T)$.

Bevor eine Stabilitätsanalyse möglich wird, muss man beides:
sowohl $\boldsymbol{x}^{(p)}$ wie auch den Wert von T kennen.
Die sind meist nicht vorgegeben, und (falls überhaupt) nur numerisch zugänglich.
Wir setzen aber jetzt voraus,
dass uns die Lösung und die Periodendauer schon (vorläufig) bekannt sind.

Schicksal der (kleinen) Störungen entscheidet sich
auf der Zeitskala von T.

Zwei Zugänge:

- *analytisch* und
- *geometrisch* (qualitativ).

Floquet-Theorie *(nach Gaston Floquet)*

- kleine Störung: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^{(p)}(t) + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$

- Taylor-Entwicklung *(komponentenweise)*:

$$\dot{x}_i^{(p)}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) = f_i\big(\boldsymbol{x}^{(p)}(t)\big) + \sum_j \frac{\partial f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big)}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(p)}(t)} \tilde{x}_j(t) + O(\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2)$$

- Jacobi-Matrix ist zeitabhängig
  und wird an der periodischen Lösung $\boldsymbol{x}^{(p)}(t)$ berechnet.

- Linearisierung: $$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \sum_j \frac{\partial f_i\big(x(t)\big)}{\partial x_j}\, \tilde{x}_j(t)$$

- $\Rightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = A(t)\, \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$:
  homogene lineare DGL mit periodischen Koeffizienten.

Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung N
mit periodischen Koeffizienten.

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) \;=\; A(t)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Allgemein gibt es N linear unabhängiger Lösungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^1(t) \;&=\; \{x_1^1(t), x_2^1(t), \ldots, x_N^1(t)\} \\
\boldsymbol{x}^2(t) \;&=\; \{x_1^2(t), x_2^2(t), \ldots, x_N^2(t)\} \\
&\ldots \\
\boldsymbol{x}^N(t) \;&=\; \{x_1^N(t), x_2^N(t), \ldots, x_N^N(t)\}
\end{aligned}$$

Zusammen bilden sie eine Fundamentalmatrix:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t) = \left[\left[\boldsymbol{x}^1(t)\right] \ldots \left[\boldsymbol{x}^N(t)\right]\right]$$

Wir wählen die linear unabhängigen Lösungen so aus,
dass sie zu $t{=}0$ einer Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}_N$ entsprechen: $\tilde{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{E}_N$.

Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung N
mit periodischen Koeffizienten.

Matrix-DGL: $\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$.

Floquet: Es existiert eine konstante (t-unabhängige) Matrix $\boldsymbol{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{\boldsymbol{X}}(t+T) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t)\,\boldsymbol{C}$.

($t{=}0$ einsetzen) $\Rightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{X}}(T) = \tilde{\boldsymbol{X}}(0)\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}_N\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{C} = \tilde{\boldsymbol{X}}(T)$,
$\boldsymbol{C}$ ist Ergebnis der Evolution einer Einheitsmatrix nach einer Periode T.

Diese $N \times N$ Matrix $\boldsymbol{C}$ heißt *Monodromie-Matrix*.

$\mu o \nu o \varsigma$: einzig, $\delta \rho o \mu o \varsigma$: Rennstrecke

Deren Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_N$ werden *Floquet-Multiplikatoren* genannt.

Da $\boldsymbol{C}$ eine reelle Matrix, sind μ_i entweder reell,
oder paarweise komplex-konjugiert.

Spur einer Matrix ist Summe ihrer Eigenwerte $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C}) = \sum_j^N \mu_j$

Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Floquet: Es existiert eine konstante (t-unabhängige) Matrix $\boldsymbol{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t)\,C$.

Wir nehmen eine spezielle Anfangsstörung $\tilde{y}(0)$, die einem Eigenvector der Matrix $\boldsymbol{C}$ mit dem Eigenwert (*Multiplikator*) μ_i entspricht.
Dann: $\tilde{y}(T) = \tilde{y}(0)\boldsymbol{C} = \mu_i\,\tilde{y}(0)$.

Weiter: $\tilde{y}(2T) = \tilde{y}(T)\boldsymbol{C} = \mu_i^2\,\tilde{y}(0)$ und allgemein $\tilde{y}(nT) = \mu_i^n\,\tilde{y}(0)$.

Nach jeder Periode T wird die Störung
mit dem Eigenwert μ_i multipliziert (daher *Multiplikator*).

Bei einem komplexen μ_i wird die Störung
nicht nur mit Faktor $|\mu_i|$ gestreckt bzw. gekürzt:
sie dreht sich im Phasenraum um den Winkel $\mathrm{Arg}(\mu_i)$.

Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{X}}}(t) = A(t)\,\tilde{\boldsymbol{X}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Superpositionsprinzip: Eine allgemeine Anfangsstörung kann an die Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{C}$ projiziert werden. Dann wird die k.-Komponente der Störung $(k = 1, \ldots, N)$ nach jeder neuen Periode T mit dem Eigenwert μ_k multipliziert.

$\Rightarrow$ Stabilitätsbedingung: damit die Störung nicht wächst, muss $\forall i$ die Ungleichung $|\mu_i| \leq 1$ gelten: keine Floquet-Multiplikatoren außerhalb des Einheitskreises.

Floquet-Theorie

Betrachten wir nun die Evolution
einer besonderen Anfangsstörung der periodischen Referenz-Lösung:

$$\tilde{x}(0) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(p)}(0)\right) \cdot \delta t \quad \text{mit hinreichend kleinem } \delta t.$$

Sie liegt direkt auf der Bahnkurve der ungestörten Referenz-Lösung und ist nichts anderes als eine Verschiebung entlang der Bahn.

Damit läuft die gestörte Lösung die ganze Zeit entlang der (periodischen!) Referenz-Kurve, und nach dem Zeitintervall T ist sie wieder $\tilde{x}(0)$: weder gewachsen noch geschrumpft.

Da diese Störung nach einer Periode T exakt zu ihrem Anfangszustand zurückfindet, ist sie neutral.
Da die Störungsamplitude sich nach der Zeit T nicht ändert, ist entsprehender Multiplikator gleich 1.

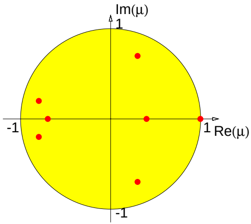
Damit ist bei autonomen Systemen ein Multiplikator immer gleich 1: er entspricht einer Störung entlang der ursprünglichen periodischen Bahn (tangentiale Störung).

Neutrale Störung folgt aus der Zeitunabhängigkeit der Gleichungsform: ein autonomes System ist invariant bezüglich der Zeitverschiebung.

Floquet-Theorie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(p)}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t)\,\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Eine stabile periodische Lösung $\mathbf{x}^{(p)}(t)$:
es liegen keine Multiplikatoren
außerhalb des Einheitskreises.

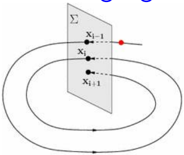


Bei Stabilitätsverlust durchqueren
ein (reeller) oder zwei (komplex-konjugierte)
Multiplikatoren den Einheitskreis.

Qualitativ, gibt es dazu drei Möglichkeiten:

- Ein reeller Multiplikator, $\mu = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\mu = -1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\mu = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \;\; \varphi \neq \pi n$.

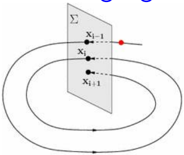
Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang



Einer periodischen Lösung entspricht im N-dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.

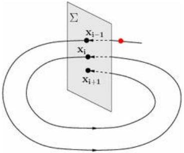
- Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N-1)$-dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve transversal schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche lokale Koordinaten $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_k \to \{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_{k+1}$$
- Ein Satz von N–1 Zahlen wird in einen anderen Satz von N–1 Zahlen überführt durch eine umkehrbare, stetige und differenzierbare Abbildung:
Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), *return mapping*.
- Iterationen dieser Abbildung entsprechen zeitlicher Evolution entlang einer Bahnkurve des ursprünglichen System.
Eigene “Zeit” der Abbildung wird ganzzählig: Anzahl der Iterationen k.

Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang



Einer periodischen Lösung entspricht im N-dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.

- Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N-1)$-dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve transversal schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche lokale Koordinaten $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_k \to \{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\}_{k+1}$$
- Ein Satz von N–1 Zahlen wird in einen anderen Satz von N–1 Zahlen überführt durch eine umkehrbare, stetige und differenzierbare Abbildung:
Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), *return mapping*.
- Die "echte" zeitliche Dauer der Iteration *(also, die Periodendauer T in ursprünglichen Zeiteinheiten!)* spielt dabei keine Rolle; wir nehmen nur an, dass sie beschränkt bleibt.



Poincaré-Abbildung überführt in sich die Koordinaten auf einer $(N–1)$-dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve) im System mit kontinuierlicher Zeit liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Rückkehrabbildung am Fixpunkt, der der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen die $(N–1)\times(N–1)$ Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

Die N-1 Eigenwerte dieser Matrix sind die (uns schon bekannten) Floquet-Multiplikatoren.

Einer fehlt: es ist Eigenwert 1: er charakterisiert Störungen entlang der stetigen Bahnkurve, also transversal zur Poincaré-Ebene.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle N-1 Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Bei Stabilitätsverlust durchqueren ein (reeller) oder zwei (komplex-konjugierte) der Eigenwerten den Einheitskreis.

Dabei gilt Zentrumsmannigfaltigkeitssatz:
N–1-dimensionale Dynamik reduziert sich auf eine n-dimensionale Abbildung;
n ist Anzahl von relevanten Eigenwerten.

- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\lambda = \mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \;\; \varphi \neq \pi k \quad \Rightarrow \quad n = 2$.

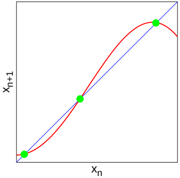
Damit ergeben sich 3 unterschiedliche typische Arten von Stabilitätsverlust.

Eindimensionale Abbildungen: allgemeine Merkmale

$$x \to f(x), \qquad\qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Graphische Darstellung.

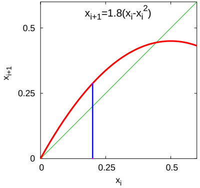
Zusammen mit dem Graph der Funktion $f(x)$,
wird oft auch die Winkelhalbierende geplottet:
deren Schnittpunkte mit $f(x)$ sind Fixpunkte der Abbildung,
sie entprechen der periodischen Bahnkurven im kontinuierlichen System.



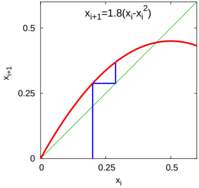
Stabilität vom Fixpunkt x_p: $\quad f(x_p+\delta) \approx f(x_p) + f'(x_p)\,\delta = x_p + f'(x_p)\,\delta$

Multiplikator: Steigung $f'(x_p)$ der Kurve im Fixpunkt.
Stabilitätsbedingung: $|f'(x_p)| \leq 1$.

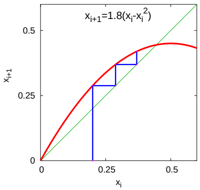
Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



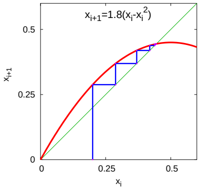
Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



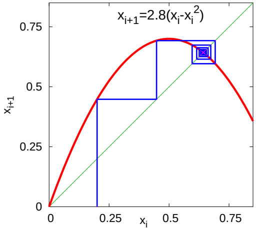
Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



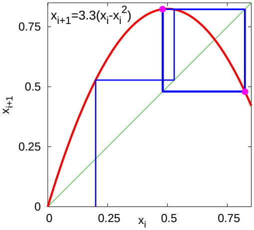
Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



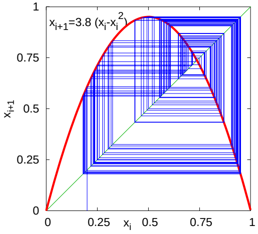
monotone Konvergenz zum stabilen Fixpunkt



oszillatorische Konvergenz



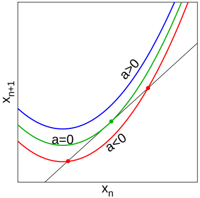
Konvergenz zum Zyklus mit Periode 2



aperiodische Iterationssequenz

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei 1 Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Laut dem Zentrumsmannigfaltigkeitssatz wird Dynamik auf eine eindimensionale Abbildung reduziert.



Normalform: $x_{n+1} = x_n + a + x_n^2, \quad f'(x) = 1 + 2x$

- $a < 0$: zwei Fixpunkte (instabiler und stabiler) bei $x = \pm\sqrt{-a}$.
- $a = 0$: ein neutraler Fixpunkt bei $x = 0$.
- $a > 0$: keine Fixpunkte.

Beim durchqueren des Werts $a = 0$ werden zwei Fixpunkte geboren/vernichtet.

Diese Bifurkation wird oft tangent bifurcation genannt,
wegen der Berührung von $f(x)$ mit der Winkelhalbierenden bei $a = 0$.

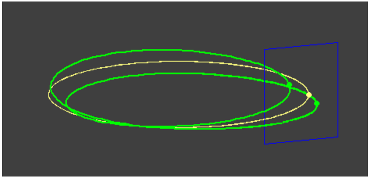
Im ursprünglichen zeit-kontinuierlichen System ist es eine
Sattel-Knoten Bifurkation von periodischen Lösungen:

zwei geschlossene Phasenbahnen stoßen aufeinander
(entlang der ganzen Länge) und verschwinden.

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei -1 Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Die Störung, die auf dem entsprechenden Eigenvektor liegt,
ändert ihr Vorzeichen nach einem Umlauf im Phasenraum.

Nach dem zweiten Umlauf, ändert sich das Vorzeichen wieder:
$\Rightarrow$ ursprüngliche Störung wird wiederhergestellt.



So entsteht im Phasenraum eine Trajektorie, die sich
nach zwei Runden schließt und eine verdoppelte Periodendauer hat.
Das ist eine Periodenverdopplungsbifurkation (period-doubling, flip).

Periodische Lösung ist asymptotisch stabil,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei $e^{\pm i\boldsymbol{\theta}}$ Eigenwert von der Jacobi-Matrix.
Die entsprechende neutrale Störung wird nach einem Umlauf
weder größer noch kleiner im Betrag (Amplitude),
aber sie dreht sich um den Winkel $\boldsymbol{\theta}$ (Phasendrehung).

So, nach und nach, entsteht auf der Poincaré-Ebene ein invarianter Kreis;
falls $\boldsymbol{\theta} = 2\pi m/n$, schließt sich die Trajektorie
nach n Iterationen der Abbildung (und m Umdrehungen um den Kreis),
sonst bedeckt sie den ganzen Kreis dicht.

Einem invarianten Kreis auf der Poincaré-Ebene
entspricht im Phasenraum eine schlauchartige Oberfläche:
ein zwei-dimensionaler Torus.
Geburt von einem Torus aus einem Grenzzyklus
wird Neimark-Sacker-Bifurkation genannt.