

Vorlesung 16.

Allgemeine Eigenschaften chaotischer Dynamik. Lyapunov-Exponenten.





- ▶ Jede Realisierung von einem chaotischen dynamischen System ist unvorhersagbar. Welche Aussagen sind hier trotzdem möglich?
- ▶ Zum Beispiel: was sagt uns eine Mittelung über chaotische Trajektorien?
- ▶ Wir ersetzen ein einzelnes System durch ein großes Ensemble aus identischen Kopien von diesem dynamischen System. Der Evolutionsoperator ist für alle derselbe; der einzige Unterschied besteht in den Anfangsbedingungen.
- ▶ Im Phasenraum wird dieses Ensemble zu jedem Zeitpunkt durch eine Wolke von Punkten dargestellt.
- ▶ Jedes Ensemble-Mitglied (Punkt) bewegt sich entlang **seiner** Phasenkurve. Diese Kurven sind in der Regel zueinander nicht parallel, auch die Geschwindigkeiten entlang der Kurven unterscheiden sich, entsprechend wird sich die Wolke im Laufe der Zeit *verschieben, umformen, stellenweise verdichten/verdünnen* usw.



Wir fangen mit einem einfachem System an:

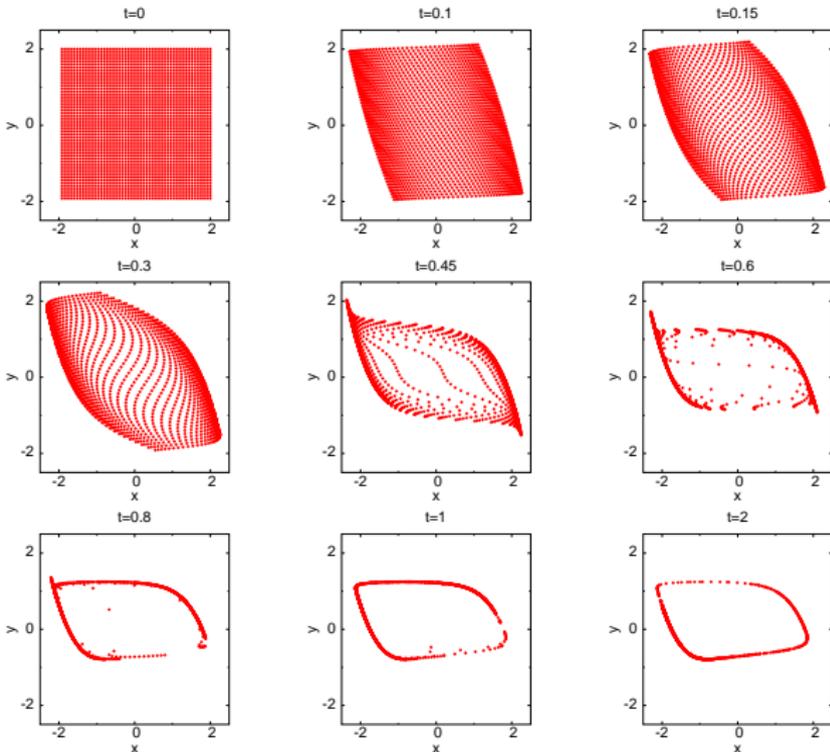
FitzHugh-Nagumo Gleichungen im oszillatorischen Zustand.

$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$

und nehmen ein Ensemble aus 50×50 Anfangsbedingungen,
homogen verteilt auf der Phasenebene.



$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$





Wir beschreiben die Evolution der Wolke von dynamischen Systemen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ durch die Verteilungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$.

Die Dichte wird normiert: $\int \rho(\mathbf{x}, t) dV = 1$.

$\rho(\mathbf{x}, t)dV$ ist die relative Anzahl von Systemen im Volumen dV am Ort (des Phasenraums) \mathbf{x} zum Zeitpunkt t .

Mittelung über Ensemble ergibt zeitabhängige Observablen $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$:

$$\langle f \rangle(t) = \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV$$

Anzahl von Systemen im Ensemble bleibt konstant:
sie werden weder erzeugt noch vernichtet.

Aus diesem Erhaltungsgesetz folgt die Bilanzgleichung für die Dichte:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\mathbf{F}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Grenzwerte von der Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ bei $t \rightarrow \infty$ sind meist **singulär**.

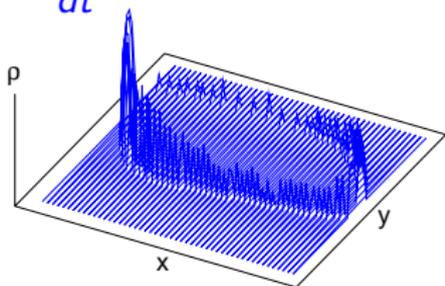


Grenzwerte von $\rho(\mathbf{x}, t)$ bei $t \rightarrow \infty$ werden meist **singulär**:

In Systemen mit einem **global** stabilen Gleichgewicht zieht sich mit der Zeit die ganze Wolke zum **einzigem** Punkt und bildet da eine δ -Funktion.

In Systemen mit einem Grenzzyklus verteilt sich die Wolke entlang einer geschlossener Linie.

$$\epsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a, \quad \epsilon = 0.1, \quad a = 0.8$$



Die Höhe wird größer entlang den **langsamen** Segmenten.

In Systemen mit einem **seltsamen Attraktor** zieht sich die Wolke zu einem singulären Objekt über einer fraktalen Menge.



Für die Charakterisierung dieser Verteilungen wird der Begriff von einem **Maß** benutzt.

Maßverteilung: jeder (messbaren) Untermenge im Phasenraum entspricht eine nichtnegative Zahl: ein **Maß**. Maß ist additiv.

Die meisten Punkte wandern mit der Zeit, und der Maß ändert sich.

Eine besondere Anfangsmaßverteilung, bei der das Maß jeder Untermenge in der Zeit konstant bleibt, wird **invariantes** Maß genannt.

Ensemble-Mittelung für eine Observable wird zum Integral über das invariante Maß μ :

$$\langle f \rangle = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$

Existenz von μ ist bewiesen für eine beschränkte Dynamik.

Es kann aber **viele** unterschiedliche invariante Maße geben, z.B. bei einer Koexistenz von **mehreren** Gleichgewichten und/oder periodischen Lösungen, **unabhängig** von deren Stabilität.



Natürliches invariantes Maß

Wir wählen einen Anfangspunkt \mathbf{x}_0 aus,
und definieren das Maß jeder Untermenge D im Phasenraum
als **relative Verbleibzeit** in D einer Trajektorie, die in \mathbf{x}_0 anfängt:

$$\mu(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bigcup_{t(0 < t < T) : x(t) \in D}}{T}$$

Bleibt der Wert von $\mu(D)$ für alle D und **fast alle** \mathbf{x}_0 konstant,
so nennt man μ *das natürliche Maß* vom dynamischen System.

Der Existenzbeweis ist schwierig, und funktioniert nicht immer,
aber dafür ist die Mittelung über μ äquivalent zur Mittelung
über die Verteilung $\rho(\mathbf{x}, t)$ im Grenzwert $t \rightarrow \infty$:

$$\langle f \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$



Ergodizität

Ein System heißt **ergodisch**, falls es gilt:

für jede stetige Observable $f(\mathbf{x})$ und **fast jede** Trajektorie $\mathbf{x}(t)$
(mit Ausnahme der Trajektorienmenge mit Maß 0),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}(t)) dt = \int f(\mathbf{x}) d\mu$$

Damit werden **Zeitmittelung** und **Ensemblemittelung äquivalent**:
eine ausreichend lange Phasentrajektorie liefert
die ganze Information über das System.

Chaotische Dynamik ist ergodisch,
aber ein nichtchaotisches System
(z.B. quasiperiodische Bewegung auf einem Torus)
kann diese Eigenschaft ebenso besitzen.



Mischung

Chaos bedeutet Unvorhersagbarkeit:
kleine Ungenauigkeiten bei Anfangsbedingungen
verursachen große Abweichungen in der Langzeitspektive.

- ▷ Wir betrachten ein chaotisches System mit dem natürlichen Maß μ .
Evolutionoperator F^t über die Zeit t
(eindeutig definiert für alle positive und negative t)
wird als F^t bezeichnet.
- ▷ Sei D_0 ein Anfangsbereich im Phasenraum mit Maß $\mu(D_0)$.
Mit der Zeit verteilen sich die Systeme aus D_0
in dem ganzen zugänglichen Teil vom Phasenraum.
- ▷ Maß von „Teilchen“ aus D_0 , die sich zur Zeit t
in einem beliebigen „Kontrollbereich“ D_1 befinden, beträgt



$$\mu(F^t(D_0) \cap D_1)$$



Mischung

Nach einer ausreichend langen Zeit, wird ein relativer Anteil von Teilchen aus D_0 , die sich im D_1 befinden, nur von $\mu(D_1)$ abhängen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(F^t(D_0) \cap D_1)}{\mu(D_0)} = \mu(D_1)$$

Herkunft der Teilchen (Anfangsbereich D_0) wird dabei „vergessen“! Gilt das für alle D_0 und D_1 , so sagt man, dass das System **mischt**.

- ▷ Mischung bedeutet Dekorrelation.

Aus der Anwesenheit von Mischung folgt es für zwei beliebige stetige Observablen $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle f(F^t(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \rangle \langle g(\mathbf{x}) \rangle$$

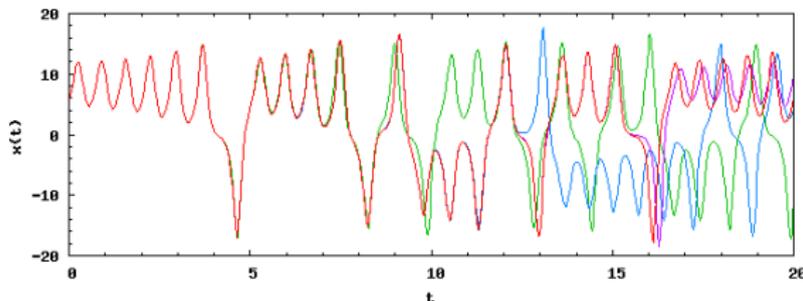
- ▷ *Mischung vs. Ergodizität*: jedes mischende System ist ergodisch, aber nicht jedes ergodische System mischt.



Sensibilität gegenüber Störungen

Am Beispiel von den Lorenz-Gleichungen haben wir gesehen, dass die benachbarten chaotischen Trajektorien sich rasch voneinander entfernen.

Kein chaotischer Orbit ist asymptotisch stabil.



Um dieses Phänomen quantitativ zu charakterisieren, gibt es ein Werkzeug: **Lyapunov-Exponenten**.



- ▷ Wir fangen an im \mathcal{R}^N mit der Referenzlösung $\mathbf{x}^{(0)}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

- ▷ Kleine Störung $\tilde{\mathbf{x}}$: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$

- ▷ Taylor-Entwicklung (*komponentenweise*):

$$\dot{x}_i^{(0)}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) = F_i(\mathbf{x}^{(0)}(t)) + \sum_j \left. \frac{\partial F_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}(t)} \tilde{x}_j(t) + \mathcal{O}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$$

- ▷ Jacobi-Matrix ist **zeitabhängig**
und wird an der Referenzlösung $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ berechnet.

- ▷ Linearisierung: $\dot{\tilde{x}}_i(t) = \sum_j \underbrace{\frac{\partial F_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j}}_{A_{ij}(t)} \tilde{x}_j(t)$

- ▷ $\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)$:
homogene lineare DGL mit zeitabhängigen Koeffizienten.

- ▷ Zusätzliche Bedingung: $\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt < \infty \quad \forall i, j.$



Satz von Lyapunov:

1. Für jede Lösung $\tilde{\mathbf{x}}(t) \exists \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|} \right) \equiv \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} < \infty$
 $\Rightarrow \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \sim \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| e^{\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} t}$
2. Es gilt für beliebige konstante C : $\Lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}} = \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}}$;
 $\Lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1 + C_2\tilde{\mathbf{x}}_2} \leq \max(\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_1}, \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_2}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2$ und beliebige Faktoren C_1, C_2 .
3. Es gibt insgesamt N linear unabhängiger Lösungen $\tilde{\mathbf{x}}_j$
(Fundamentalmatrix), jede mit eigenem Wert von $\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_j}$
4. Die **geordneten** Werte $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$ bilden das Spektrum von charakteristischen (**Lyapunov**)-Exponenten, die alle mögliche Störungen von $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ beschreiben.
5. Asymptotische Stabilität von $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ erfordert: $\Lambda_1 \leq 0$.
Für die Instabilität reicht $\Lambda_1 > 0$.

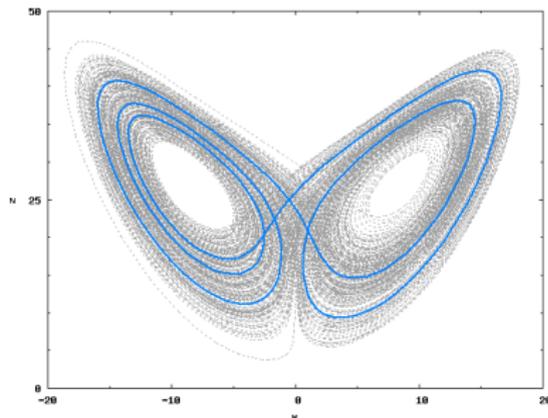
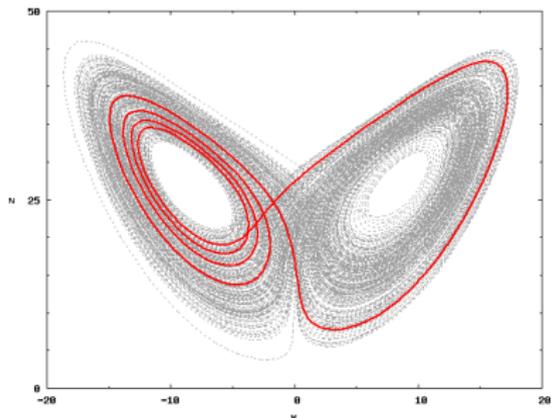
Bemerkung: Lyapunov-Exponenten sind **nicht** dimensionslos, sondern besitzen Dimension $[1/t]$.
Bei Änderung von Zeiteinheiten werden sie *umskaliert*.



- ▶ Für die Trajektorien auf dem Lorenz-Attraktor ist offensichtlich mindestens Λ_1 positiv: (Numerik: $\Lambda_1 \approx 0.9056 \dots$)
- ▶ Der Satz von $\{\Lambda_j\}$ charakterisiert **nur** die Referenzlösung $\mathbf{x}^{(0)}(t)$; *muss dieser Satz für jeden Orbit auf dem chaotischen Attraktor neu berechnet werden?*
- ▶ **Nein!** Multiplikative Ergodensatz von Oseledec (1968):
In einem System mit dem natürlichen invarianten Maß besitzt fast jede Lösung denselben Satz von Lyapunov-Exponenten.
- ▶ Interpretation: $\{\Lambda_j\}$ entstehen als einer Art Zeitmittelung von der Jacobi-Matrix. Jede chaotische Trajektorie ist dicht auf dem Attraktor: sie besucht **jeden** seiner Winkel.
Dadurch besitzt eine Schar solcher Trajektorien dieselben Mittelwerte.
- ▶ Was bedeutet „fast“? z.B. die *instabilen periodischen Lösungen* im Attraktor haben endliche Längen und kommen **nicht** überall hin. Deswegen dürfen sie andere Mittelwerte haben.
Aber sie bilden eine Ausnahme, **eine Menge vom Maß 0!**



Typical orbits vs. exceptions



Punkte: chaotischer Orbit, dicht überall auf dem Attraktor.
Linien: UPOs.



- ▶ Störungen **entlang** der Lösungskurven sind in *autonomen* dynamischen Systemen neutral: weder wachsen sie noch schrumpfen sie. Deswegen ist **einer** der Lyapunov-Exponenten in diesen Systemen **immer 0**.
- ▶ Für die Summe aller Lyapunov-Exponenten gilt:

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dt$$

(zeitliche Mittelwert von Divergenz)

- ▶ Deswegen ist in **dissipativen** Systemen immer $\sum_{j=1}^N \Lambda_j < 0$,
und in **konservativen** Systemen: $\sum_{j=1}^N \Lambda_j = 0$.

Lorenz-Attraktor: $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = -(\sigma + b + 1)$ und $\Lambda_2 = 0$.
 $\Rightarrow \Lambda_3 = -(\sigma + b + 1) - \Lambda_1$.

- ▶ Bei mehreren (> 1) positiven Lyapunov-Exponenten spricht man (gelegentlich) vom **Hyperchaos**.



In dynamischen Systemen mit **diskreten** Zeit (Abbildungen)

$$\mathbf{x} \equiv \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}\}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

sind Lyapunov-Exponenten etwas einfacher zu berechnen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|} \right) \quad \text{wird zu} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{1}{n} \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_n\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_0\|} \right).$$

- ▷ Jacobi-Matrix J wird nicht **integriert** bezüglich der Zeit, sondern **iteriert**

und (Kettenregel!) wird zum Matrix-Produkt: $J_n(\mathbf{x}_0) = \prod_{k=1}^n J(\mathbf{x}_k)$.

- ▷ Es bleibt nur noch die N Eigenwerte Λ_m von J_n zu bestimmen;
die N Lyapunov-Exponenten sind dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \Lambda_m \right)$, $m = 1, \dots, N$.
- ▷ Unterschied zu dynamischen Systemen mit kontinuierlichen Zeit:
der **Null**-Exponent ist, im *generischen* Fall, nicht dabei.
- ▷ Ist der größte der Lyapunov-Exponenten **positiv**,
dann ist die Dynamik der Abbildung $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **chaotisch**.



In dynamischen Systemen mit **diskreten** Zeit (Abbildungen) sind Lyapunov-Exponenten etwas einfacher zu berechnen: Jacobi-Matrix wird nicht **integriert bezüglich der Zeit**, sondern **iteriert**.

Besonders einfach werden die Rechenvorschriften bei **eindimensionalen Abbildungen** $x_{i+1} = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$: an der Stelle der Jacobi-Matrix tritt die lokale Ableitung

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ auf.}$$

Es gibt nur **einen** Lyapunov-Exponent, und dessen Wert ist

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right).$$

In **linearen** und **stückweise-linearen** Abbildungen ist diese Ableitung **konstant**.



Beispiel 1: **Bernoulli-mapping**.

Sie ist stückweise **linear**, stückweise **stetig** und bildet das Intervall $(0, 1]$ in sich:

$$x_{i+1} = 2x_i \bmod 1 = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2x_i - 1 & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

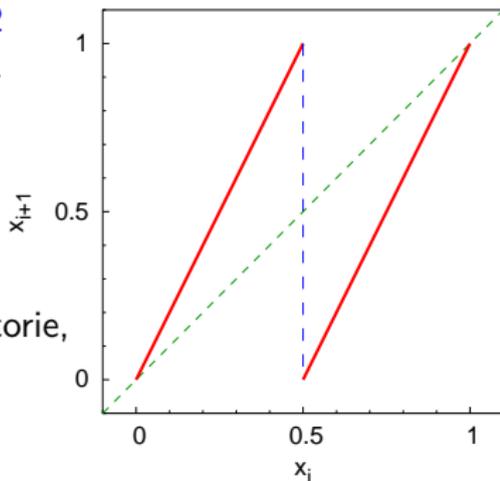
(Bernoulli-mapping kam – noch namenlos – am Ende der **Vorlesung 1**, als Beispiel von Problemen, wo Vorhersagen kaum möglich werden).

Jede **rationale** Anfangsbedingung $x = k/m$ ($k < m$ sind ganz, positiv und *teilerfremd*) **liegt an** oder **führt zu** einer **periodischen** Trajektorie, die sich nach $p \leq m$ Iterationen schließt.

Alle periodische Trajektorien sind **instabil**:
haben (Kettenregel!) Multiplikator 2^p .

Lyapunov-Exponent: $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n f'(x_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 2^n = \ln(2) > 0$

⇒ Bernoulli-mapping ist **chaotisch**.





Beispiel 2: **Tent-mapping** (*Zelt-Abbildung*)

Sie ist **stetig**, stückweise **linear** und bildet das Intervall $(0, 1]$ in sich:

$$x_{i+1} = \begin{cases} 2x_i & 0 < x_i \leq 1/2 \\ 2 - 2x_i & 1/2 < x_i \leq 1 \end{cases}$$

(Bernoulli-mapping mit der „umgeklappten“ rechten Hälfte.)

Jede **rationale** Anfangsbedingung $x = k/m$

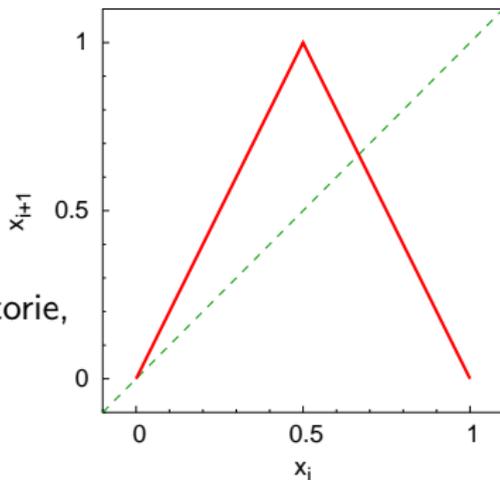
($k < m$ sind ganz, positiv und teilerfremd)

liegt an oder **führt zu** einer **periodischen** Trajektorie,

die sich nach $p \leq m$ Iterationen schließt.

Alle periodische Trajektorien sind **instabil**:

haben Multiplikator 2^p oder -2^p .



Lyapunov-Exponent: $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right| \right) = \ln(2) > 0.$

\Rightarrow Tent-mapping ist **chaotisch**.

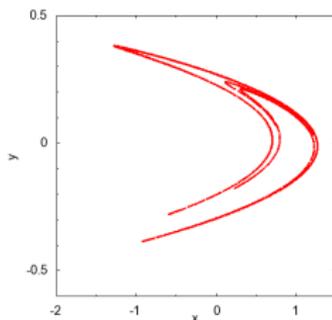


Beispiel 3: Hénon-mapping

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= b x_i\end{aligned}$$

Jacobi-Matrix am Punkt (x_i, y_i) : $\begin{pmatrix} -2 a x_i & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Wir fixieren die Werte $a = 1.4$ und $b = 0.3$.



Numerische Werte für die beiden Lyapunov-Exponenten nach 10^5 Iterationen:

$$\lambda_1 = 0.445647 > 0, \quad \lambda_2 = -1.64962.$$

⇒ Hénon-Abbildung bei diesen Werten von a und b ist **chaotisch**.