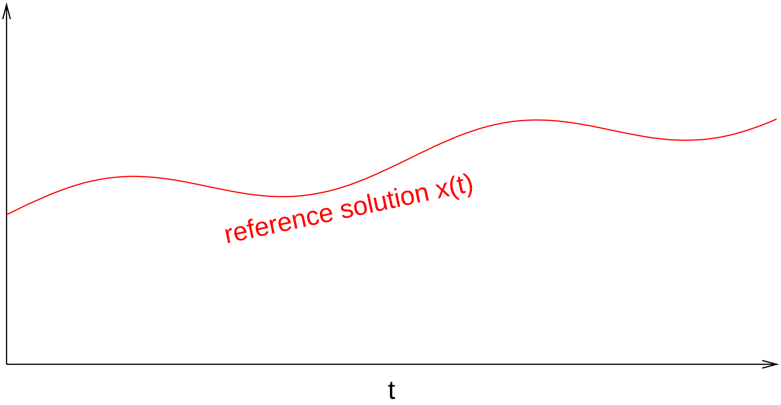
Vorlesung 2.

Stabilität: Arten und Kriterien.

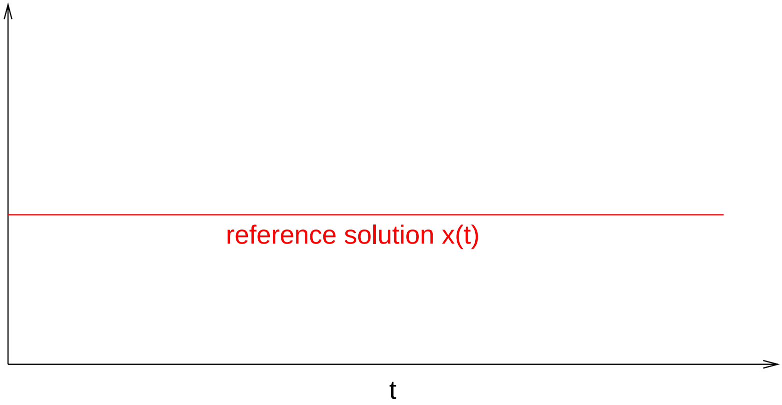
Stabilität: Unempfindlichkeit bestimmter dynamischer Merkmale gegenüber (nicht allzu starken) Störungen.

Da die „Unempfindlichkeit“ aber auch die Störungsart
sich unterschiedlich deuten lassen,
gibt es dementsprechend viele Stabilitätsarten,
die nahezu alle (!) physikalisch bedeutsam sind.

Wir betrachten eine bestimmte Lösung $x(t)$:

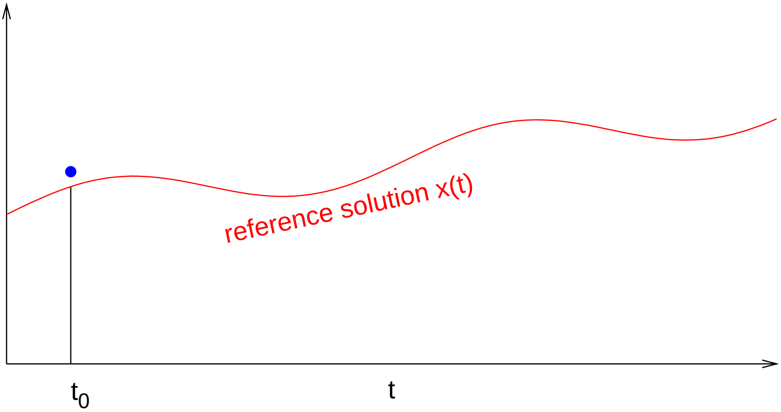


Wir betrachten eine bestimmte Lösung $x(t)$:



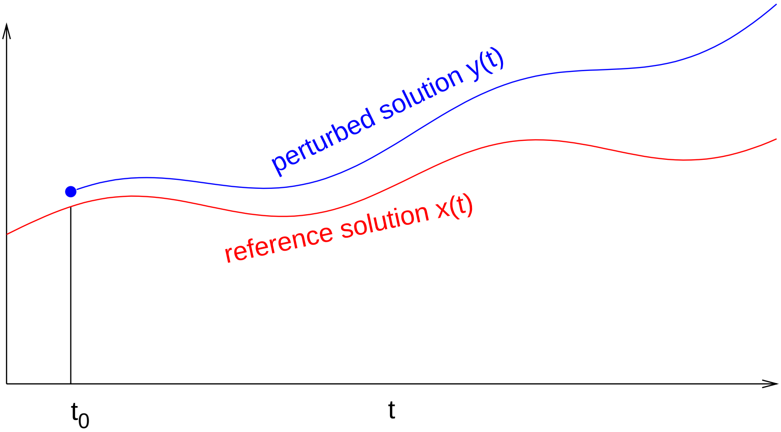
Es kann (muss nicht) auch ein Gleichgewichtszustand sein

Wir betrachten eine bestimmte Lösung $x(t)$:



... fügen am Anfangszeitpunkt t_0 eine kleine Störung ein und verfolgen deren zeitliche Evolution.

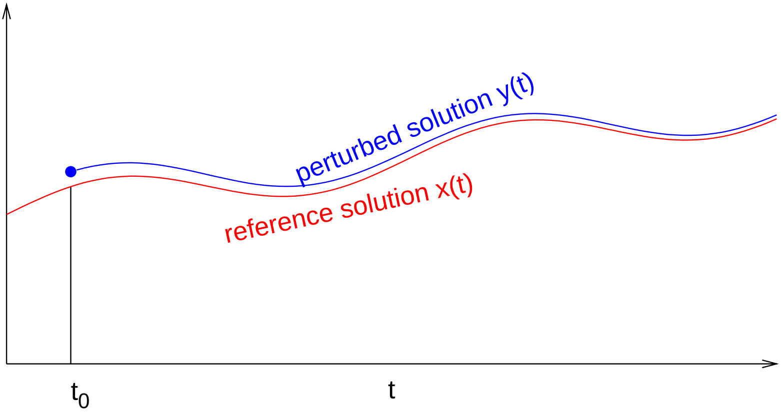
Wir betrachten eine bestimmte Lösung $x(t)$:



... fügen am Anfangszeitpunkt t_0 eine kleine Störung ein

und verfolgen deren zeitliche Evolution.
Die Störung kann mit der Zeit wachsen oder abnehmen.

Wir betrachten eine bestimmte Lösung $x(t)$:



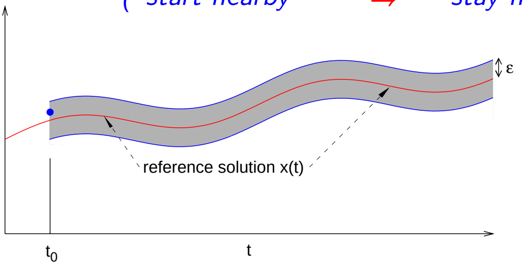
... fügen eine kleine Störung ein

und verfolgen deren zeitliche Evolution.
Die Störung kann mit der Zeit wachsen oder abnehmen.

Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

- **Stabilität nach Lagrange.**
  $\exists\delta$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t)\| < \infty \;\; \forall t > t_0$.

- **Stabilität nach Lyapunov.**
  $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta(\varepsilon)$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \; \forall t > t_0$.
  ("start nearby $\Rightarrow$ stay nearby")



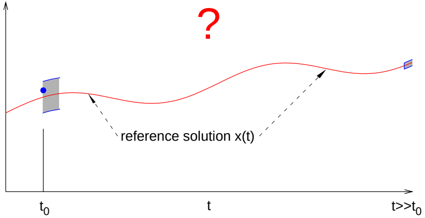
Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

- **Stabilität nach Lagrange.**
  $\exists\delta$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t)\| < \infty \;\; \forall t > t_0$.

- **Stabilität nach Lyapunov.**
  $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta(\varepsilon)$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \; \forall t > t_0$.
  ("start nearby $\Rightarrow$ stay nearby")

- **Quasiasymptotische Stabilität.**
  $\exists\delta > 0$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\lim_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$.

  Störungsamplitude wird beliebig klein bei $t \to \infty$.



Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

- **Stabilität nach Lagrange.**
  $\exists\delta:$ aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t)\| < \infty \;\; \forall t > t_0$.

- **Stabilität nach Lyapunov.**
  $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta(\varepsilon)$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \; \forall t > t_0$.
  ("start nearby $\Rightarrow$ stay nearby")

- **Quasiasymptotische Stabilität.**
  $\exists\delta > 0:$ aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\lim_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$.

  Störungsamplitude wird beliebig klein bei $t \to \infty$.

  Diese Definition erfordert nicht,
  dass die Störung auch bei allen endlichen Werten von t klein gehalten wird,
  aber für die Anwendungen sind auch die endlichen Werte meist wichtig.

  z.B. ein Auto, das sich auf der Teststrecke zehnmal überschlägt und dann wieder auf den Rädern steht, ist etwas gewöhnungsbedürftig.

Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

- **Stabilität nach Lagrange.**
  $\exists\delta :$ aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t)\| < \infty \;\; \forall t > t_0$.

- **Stabilität nach Lyapunov.**
  $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta(\varepsilon)$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \; \forall t > t_0$.
  (“start nearby $\Rightarrow$ stay nearby”)

- **Quasiasymptotische Stabilität.**
  $\exists\delta > 0 :$ aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$.

- **Asymptotische Stabilität.**
  Eine Lösung $x(t)$ heißt asymptotisch stabil, falls sie gleichzeitig stabil nach Lyapunov und quasiasymptotisch stabil ist.

Stabilitätsarten für eine beliebige Trajektorie $x(t)$

- Stabilität nach Lagrange ...
- Stabilität nach Lyapunov....
- Quasiasymptotische Stabilität.
  $\exists\delta > 0$: aus $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ folgt $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$
- Asymptotische Stabilität.
  Eine Lösung $x(t)$ heißt asymptotisch stabil, falls sie gleichzeitig stabil nach Lyapunov und quasiasymptotisch stabil ist.

$\Rightarrow$ Bei (quasi)asymptotischer Stabilität schrumpft tendenziell das Phasenvolumen.

$\Rightarrow$ In dynamischen Systemen mit konstantem Phasenvolumen *(konservative, darunter Hamiltonsche Systeme)* kommt asymptotische Stabilität nie vor.

Stabilitätsarten, relevant für die Lösungen,
die keine Gleichgewichte sind: $x(t) \neq \text{const.}$
Beispiel: Konservativer Oszillator mit Kreisbahnen

Mathematischer Einschub: Dynamik auf der Ebene in Polarkoordinaten.

Polarkoordinaten: $\begin{cases} x(t) = r(t)\,\cos\varphi(t) \\ y(t) = r(t)\,\sin\varphi(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \\ \tan\varphi(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)} \end{cases}$

Es folgt, nach dem Differenzieren, $2r\,\dot{r} = 2x\,\dot{x} + 2y\,\dot{y} \Rightarrow \dot{r} = \dfrac{x\,\dot{x} + y\,\dot{y}}{r}$

Zeitableitungen: $\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\,\cos\varphi - r\,\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}\,\sin\varphi + r\,\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \end{cases}$

Obere Zeile, mit $\sin\varphi$ multipliziert,
aus der *unteren Zeile*, mit $\cos\varphi$ multipliziert, abziehen:

$$\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi = r\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + r\sin^2\varphi\,\dot{\varphi} = r\,\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi}{r} \Rightarrow \text{mit } \left(\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r}\right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}\,x - \dot{x}\,y}{r^2}.$$

Stabilitätsarten, relevant für die Lösungen,
die keine Gleichgewichte sind: $x(t) \neq$ const.
Beispiel: Konservativer Oszillator mit Kreisbahnen

- Harmonisch $(\ddot{x} + \omega^2 x = 0)$: $\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \Rightarrow$ Polarkoordinaten: $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$

  Phasenbahnen: Kreise. Winkelgeschwindigkeit: unabhängig von der Amplitude.

  Eine *Wolke aus Zuständen* dreht sich um den Ursprung wie ein starrer Körper.
  $\Rightarrow$ Alle Trajektorien sind stabil nach Lyapunov!

- Anharmonisch (nichtlinear):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y(1 + \epsilon\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = \ \ \omega x(1 + \epsilon\sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \Rightarrow \text{Polarkoordinaten: } \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega(1 + \epsilon r) \end{cases}$$

  Explizite Lösung: $r(t) = r_0 = \text{const},\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega(1 + \epsilon r_0)\, t$.
  Phasenbahnen: Kreise. Winkelgeschwindigkeit: abhängig von der Amplitude r.

  Zwei ursprünglich benachbarte Lösungen mit gleichen Anfangswerten für φ
  und den Werten von r, die sich um δ_r unterscheiden,
  finden sich nach $t = \pi/(\epsilon\delta_r)$ an unterschiedlichen Enden eines Diameters $2r_0$.
  $\Rightarrow$ keine Stabilität nach Lyapunov!

  Aber die Bahnen bleiben dabei einander nah. *Eine andere Art Stabilität?*

Stabilitätsarten, relevant für die Lösungen,
die keine Gleichgewichte sind: $x(t) \neq \text{const}$.

- **Orbitale Stabilität**:
  bei hinreichend kleinen Störungen von Anfangsbedingungen,
  können zwar die instantanen Zustände auseinandergehen,
  aber nicht die gesamten Phasenbahnen.

- **Stabilität „nach Poisson"**: (wiederholte Rückkehr)
  Die Trajektorie hat die Umgebung von jedem ihrer Punkte
  in beliebig ferner Vergangenheit schon besucht,
  und kommt wieder in die Umgebung von jedem ihrer Punkte
  in beliebig ferner Zukunft. (...unendlich viele mal...)

Für *asymptotisch stabile* Gleichgewichte ist diese Eigenschaft trival vorhanden:
sie bleiben zum *jeden* Zeitpunkt da, samt ihrer unmittelbarer Nachbarschaften.

Ebenso für *asymptotisch stabile* periodische Lösungen: (Periodendauer T):
sie kehren zurück nach kT, $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Aber auch die chaotischen Lösungen sind Poisson-stabil: sie kommen immer
wieder beliebig nah zurück, obwohl nach unregelmässigen Zeitabständen.

- **Strukturelle Stabilität**:
  (nicht die Lösungen sondern die Gleichungen werden gestört)

  "Strukturell" bezieht sich auf den Aufbau vom Phasenraum:
  dessen Struktur bleibt *(oder bleibt nicht)* erhalten.

  Das System $\dot{x} = f(x)$ heißt strukturell stabil,
  falls dessen Dynamik und die Dynamik des Systems $\dot{x} = f(x) + g(x)$
  für alle hinreichend kleinen $\|g(x)\|$ qualitativ übereinstimmen.

  > *"qualitativ übereinstimmen": ähnliche Phasenportraits, gleiche Anzahl von Gleichgewichten, gleiche Anzahl von geschlossenen Phasenbahnen...*

  Mathematisch: bei hinreichend kleinen Störungen der rechten Seite
  bleiben das ungestörte und das gestörte System topologisch äquivalent:

  es existiert eine stetige umkehrbare Abbildung *(Homöomorphismus)*,
  welche jede Trajektorie des gestörten Systems
  in eine Trajektorie des ungestörten Systems überführt
  und umgekehrt.

! Interessant sind natürlich strukturell instabile Fälle:
eine beliebig kleine Änderung der rechten Gleichungsseite reicht,
um ein qualitativ anderes Phasenporträt zu erzeugen!

Alle diese Definitionen schließen die Betrachtung von allen (hinreichend kleinen) Störungen ein

Im Gegensatz dazu reicht ein einziges Gegenbeispiel für die Abwesenheit der Stabilität (also, Instabilität).

Muß man tatsächlich alle Störungen nacheinander verfolgen? !!!

Wir fangen an mit Gleichgewichten:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x_*) = 0$$

Im Kontext der Gleichgewichte in Mechanik
bekommt diese Fragestellung eine relativ einfache Antwort.

Wohin steuert bei $t \to \infty$ ein Teilchen,
dass sich in Anwesenheit einer schwacher Reibung
und ohne Energiezufluss entlang einer Potentiallandschaft bewegt?

Natürlich in ein Minimum vom Potential.

Der Grund: Gesamtenergie kann mit der Zeit nur abnehmen.

Ein Minimum vom Potential entspricht einem Gleichgewicht:
da verschwindet die Kraft identisch.

Dieses Gleichgewicht ist offensichtlich mechanisch stabil:
um die Potentialmulde zu verlassen, muss die Gesamtenergie <u>wachsen</u>.

Wie kann man diese Denkweise
für den nicht-mechanischen Kontext verallgemeinern?

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, N$$

$$\text{Gleichgewicht } \boldsymbol{x}_*: \quad f_i(\boldsymbol{x}_*) = 0 \;\; \forall i$$

Wir betrachten eine Umgebung G des Fixpunktes $\boldsymbol{x}_*$
und eine differenzierbare Funktion $V(\boldsymbol{x})$, definiert in G.

Zeitableitung von $V(\boldsymbol{x})$:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x})$$

Die Funktion $V(\boldsymbol{x})$ heißt Lyapunov-Funktion, falls sie:

a) ihren minimalen Wert in G im Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}_*$ annimmt:

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_* \in G, \quad V(\boldsymbol{x}) > V(\boldsymbol{x}_*) \quad ,$$

b) nirgendwo in G mit der Zeit zunehmen darf:

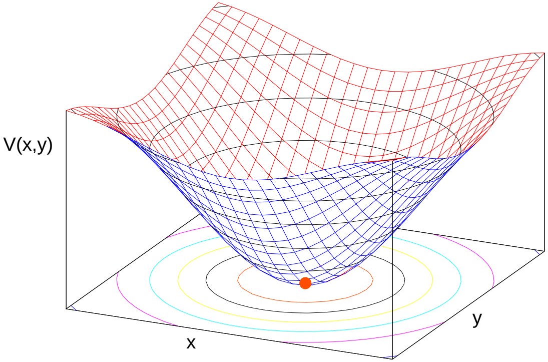
$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in G.$$

Theoreme von Alexander Lyapunov:

1. Falls $\exists$ eine Umgebung G des Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_*$,
   und in ihr $\exists$ eine Lyapunov-Funktion V,
   dann ist das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_*$ stabil nach Lyapunov.
2. Falls $dV/dt < 0$ in ganz G außer im Punkt $\boldsymbol{x}_*$ selbst,
   dann ist das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_*$ asymptotisch stabil.

Uns bleibt nur die Lyapunov-Funktion zu finden (zumindest eine...)

In der Nähe von einem Minimum $\boldsymbol{x}_*$
sind Isoflächen (Isolinien) von $V(\boldsymbol{x})$ geschlossene Flächen (Kurven).



Eine Trajektorie kann die Umgebung vom Minimum $\boldsymbol{x}_*$ nicht verlassen:

das würde nur über Wachstum von $V(\boldsymbol{x})$ gehen, aber $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Beispiel 1. Nichtlineare Oszillator $\ddot{x} + c\dot{x} + a\,x + b\,x^3 \;=\; 0$ mit positiven a, b, c.

- Was bedeutet $a > 0$? Sonst hat man beim Gleichgewicht $x = \dot{x} = 0$ kein Minimum der potentiellen Energie.
- Was bedeutet $c > 0$? Positiver Reibungskoeffizient; Gesamtenergie wird mit der Zeit kleiner.
- Was bedeutet $b > 0$? Sogenannte *"harte Feder"*: Rückstellkraft als Funktion der Auslenkung x wächst <u>schneller</u> als beim Hookeschen Gesetz $F = -kx$.

  Bei der *"weichen"* Feder ($b < 0$) sind bis zu drei Gleichgewichtslagen möglich, bei der harten Feder, hingegen, gibt es nur ein Gleichgewicht.

Beispiel 1. Nichtlineare Oszillator $\ddot{x} + c\dot{x} + a\,x + b\,x^3 \;=\; 0$ mit positiven a, b, c.

1. Umschreiben: $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -c\,y - a\,x - b\,x^3$.
   Gleichgewicht: $x = y = 0$.
2. Wir suchen eine Funktion in der Klasse $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma y^2$ (gerade Potenzen!) mit positiven α, β, γ.
   Offensichtlich, $V(x,y) > V(0,0) = 0$.
3. $\dot{V} = 2\alpha x\dot{x} + 4\beta x^3\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} =$
   $= (2\alpha - 2\gamma a)\,xy \; + (4\beta - 2\gamma b)\,x^3 y \; -2\gamma c y^2$.
4. Der letzte Summand ist schon in Ordnung,

... und die ersten zwei können wir verschwinden lassen (dank der Freiheit in der Wahl von Konstanten α, β, γ):
$(2\alpha - 2\gamma a) = (4\beta - 2\gamma b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha/a,\; \beta = \alpha\, b/(2a)$.

5 Nun ist $dV/dt = -2\gamma c y^2 \leq 0$ für alle x, y
$\Rightarrow$ Gleichgewicht $x = y = 0$ ist global stabil nach Lyapunov.

Beispiel 2. Das System

$$\dot{x} = -x + x^2 - 2\,x\,y,$$
$$\dot{y} = -2y - 5\,x\,y + y^2, \qquad \text{Gleichgewicht: } x{=}y{=}0.$$

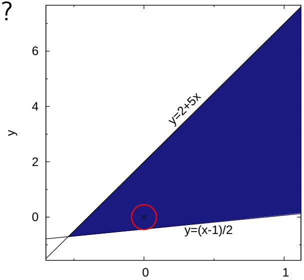
(Es gibt auch andere Gleichgewichte, z.B. $x{=}0,\ y{=}2$ oder $x{=}1,\ y{=}0$ oder $x = -\frac{5}{9},\ y = -\frac{7}{9}$).

1. Erstbester Kandidat für V: $V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.
   Offensichtlich, $V(x,y) > V(0,0) = 0$.
2. $\dot{V} = x\,\dot{x} + y\dot{y} = x\left(-x + x^2 - 2\,x\,y\right) + y\left(-2y - 5\,x\,y + y^2\right)$

... $= -x^2\left(1 - x + 2y\right) - y^2\left(2 + 5\,x - y\right)$

3 Wo gilt $y > (x-1)/2$ und $y < 2 + 5x$ gleichzeitig ?
Im keilförmigen Bereich der Phasenebene,
zu dem auch das Gleichgewicht gehört.

4 In diesem Keil gilt: $dV/dt \leq 0\ \forall x, y$
$\Rightarrow$ Gleichgewicht $x{=}y{=}0$
ist asymptotisch stabil.



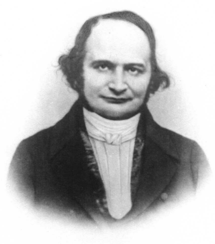
Lineare Stabilität

- $\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \dots, N.$ Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_*$: $f_i(\boldsymbol{x}_*) = 0 \; \forall i$.
- Evolution von kleinen Abweichungen $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$:

  $$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2), \text{ oder } \dot{\boldsymbol{\xi}} \;=\; J\,\boldsymbol{\xi} + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2);$$

  hier ist J Jacobi-Matrix des Systems, berechnet im Fixpunkt $\boldsymbol{x}_*$.

Brook Taylor



Carl Jacobi

Lineare Stabilität

- $\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, N$. Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_*$: $f_i(\boldsymbol{x}_*) = 0 \; \forall i$.
- Evolution von kleinen Abweichungen $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$:

  $$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2), \text{ oder } \dot{\boldsymbol{\xi}} \; = \; J\, \boldsymbol{\xi} + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2);$$

  hier ist J Jacobi-Matrix des Systems, berechnet im Fixpunkt $\boldsymbol{x}_*$.
- Annahme: alle N Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ der Matrix J sind reell, negativ und paarweise unterschiedlich.
- Nach dem Übergang in ein neues Koordinatensystem, in dem die Koordinaten y entlang der Eigenvektoren von der Matrix J gerichtet sind, gilt: $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O(\|\boldsymbol{y}\|^2)$.
- Wir führen $V(y) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_j y_j^2$ ein.

  $dV/dt = \sum_j \lambda_j y_j^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3) \; \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V$ – Lyapunov-Funktion.

Lineare Stabilität

- Analog funktioniert es in den Fällen, in denen manche Eigenwerte paarweise gleich oder paarweise komplex konjugiert sind.
  Wir leiten ab:

$$dV/dt = \sum_j \mathrm{Re}(\lambda_j) y_j^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3)$$

- Daraus folgt eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität eines Gleichgewichts:

  Ein Gleichgewicht ist asymptotisch stabil, falls $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0 \ \ \forall j$.

Zurück zur Evolution kleiner Abweichungen $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$:

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\boldsymbol{\xi}\|^2):$$

.

Zurück zur Evolution kleiner Abweichungen $\xi_i \equiv x_i - x_{*i}$:

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j$$

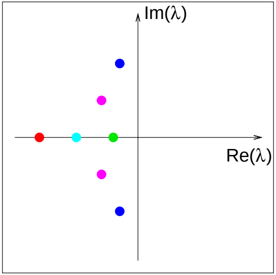
- lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.
- Allg.Lösung: $\xi(t) \;=\; C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \ldots + C_N\, \mathrm{e}^{\lambda_N t}$.
- Für komplexe $\lambda = \rho + \mathrm{i}\,\omega$: $\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\rho t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.
- Hinreichende Bedingung einer Instabilität: $\exists\, j : \quad \mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$.
- Zusammenfassung:
  Stabilität eines Gleichgewichts erfordert

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \forall j$$

Bei einem Gleichungssystem $\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, N$:

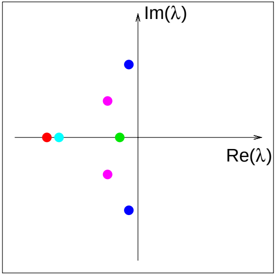
1. Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_*$ finden.
2. An diesem Gleichgewicht die $N \times N$ Jacobi-Matrix $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ bestimmen.
3. Alle N Eigenwerte der Jacobi-Matrix berechnen.
4. Sind alle Eigenwerte negativ bzw. haben negative reelle Teile, dann ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil.
5. Gibt es hingegen mindestens einen Eigenwert
   mit dem positiven reellen Teil,
   dann ist das Gleichgewicht asymptotisch instabil.

Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



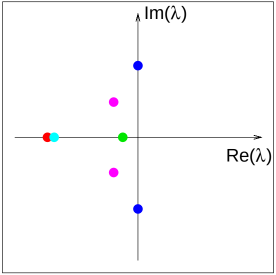
Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter μ abhängt, dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix μ-abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ.

Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter μ abhängt, dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix μ-abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ.

Spektrum von Eigenwerten der Jacobi-Matrix



Falls die rechte Gleichungsseite stetig vom Parameter μ abhängt,

dann sind auch die Eigenwerte von der Jacobi-Matrix μ-abhängig,
und ändern sich stetig zusammen mit μ.

Dabei kann ein stabiles Gleichgewicht instabil werden,
oder umgekehrt.