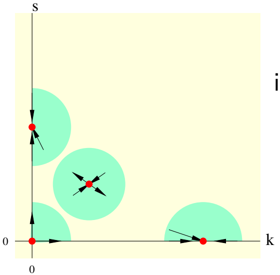
Vorlesung 5.

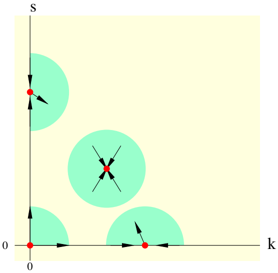
Zweidimensionale Dynamik: Existenz und Nicht-Existenz periodischer Lösungen

Vervollständigung



Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

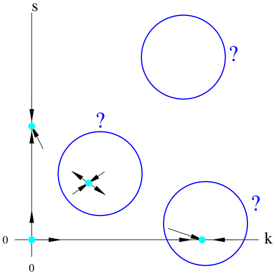
Kann man aus diesen Stücken ein globales Gesamtbild zusammenflicken?



Dafür fehlt uns das Wissen, ob geschlossene Bahnen (periodische Orbits) in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.

Vervollständigung

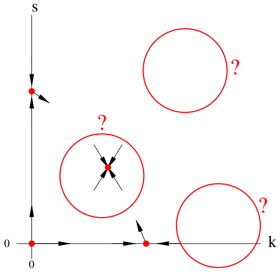


Linearisierte Gleichungen liefern korrektes Bild in den lokalen Umgebungen aller Gleichgewichte (dank Grobman-Hartman Satz).

Kann man aus diesen Stücken ein globales Gesamtbild zusammenflicken?

Dafür fehlt uns das Wissen, ob geschlossene Bahnen (periodische Orbits) in diesem Quadranten der Phasenebene ebenso vorhanden sind.

Explizit (in der Regel) kann man sie nicht finden.

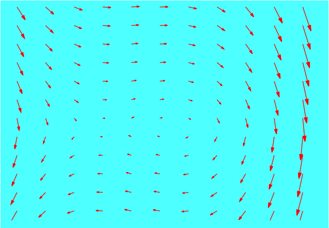


Ein autonomes dynamisches System

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

definiert im zweidimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

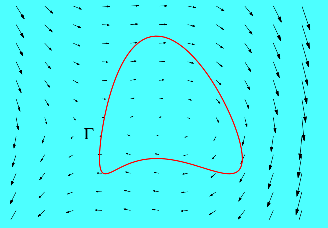
jedem Punkt (x_1, x_2) wird
ein Vektor mit Komponenten
$\big(f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)\big)$
zugeordnet.



In jedem Punkt (außer Gleichgewichte) ist dieser Vektor
entlang der Lösungskurve gerichtet, die durch diesen Punkt verläuft.

Richtung: $\varphi = \arctan \dfrac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$

Nun legen wir auf die Phasenebene
eine geschlossene Kurve Γ
(nicht unbedingt eine Bahnkurve),
die sich selbst nicht schneidet,
und auf der kein Gleichgewicht liegt:

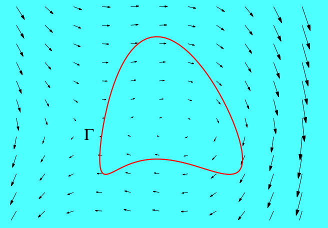


Wir wählen auf Γ einen beliebigen Anfangspunkt,
gehen einmal um Γ herum *(z.B. im Gegenuhrzeigesinn)*
und zählen die Umdrehungen des Vektorfeldes auf diesem Weg.

Die Anzahl der Umdrehungen heißt Poincaré-Index $I(\Gamma)$.

Der Wert von $I(\Gamma)$ ist offensichtlich ganzzahlig
und unabhängig vom Anfangspunkt auf Γ.

Nun legen wir auf die Phasenebene
eine geschlossene Kurve Γ
(nicht unbedingt eine Bahnkurve),
die sich selbst nicht schneidet,
und auf der kein Gleichgewicht liegt:



Berechnung

(Index als Integral: Summe infinitesimaler Drehungen entlang der Kurve)

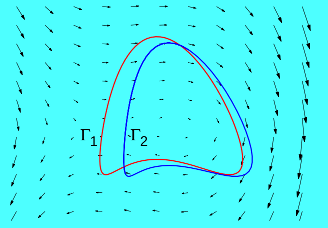
$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma d\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma d\left(\arctan\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}\right) = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2+f_2^2}$$

mit $df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2$ und $df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2$.

Da der Nenner $f_1^2+f_2^2$ nirgendwo auf Γ verschwindet,
ist $I(\Gamma)$ eindeutig definiert und eine stetige Funktion von Γ.

Bei Zeitumkehr $t \to -t$ dreht sich jeder Vektor um π;
der Wert von $I(\Gamma)$ bleibt dabei invariant.

Welche Auswirkungen hat eine hinreichend kleine Verschiebung und/oder Deformation von Γ *(so dass kein Gleichgewicht berührt wird)* ?



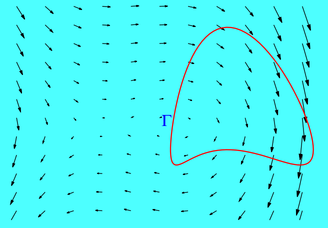
Wegen Stetigkeit darf $I(\Gamma_2)$ nur geringfügig vom $I(\Gamma_1)$ abweichen.

Aber eine ganzzahlige Funktion
kann man nicht „geringfügig" ändern!

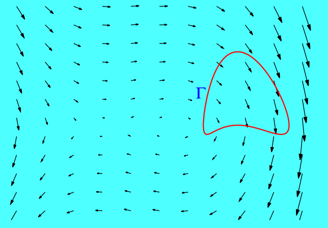
$$\Rightarrow \qquad I(\Gamma_1) = I(\Gamma_2)$$

Folge: zwei beliebige (und damit alle) geschlossene Kurven,
die so ineinander stetig überführt werden können,
dass bei der Transformation kein Gleichgewicht berührt wird,
haben denselben Wert des Indexes I.

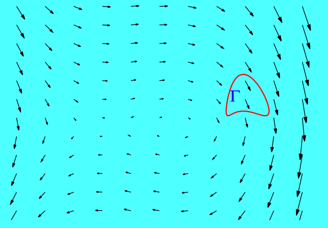
Eine geschlossene Kurve Γ*, die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



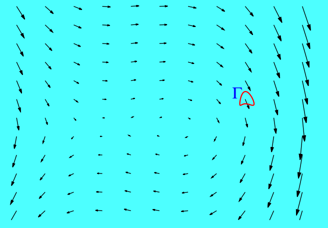
Eine geschlossene Kurve Γ, die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.



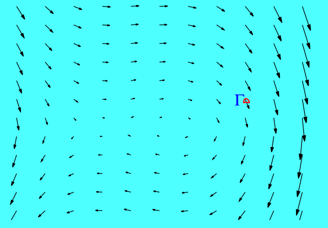
Eine geschlossene Kurve Γ, die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.



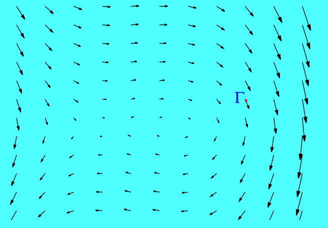
Eine geschlossene Kurve Γ*, die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.*



Eine geschlossene Kurve Γ*, die* *keine* *Gleichgewichte in ihrem Inneren hat,*
kann stetig verkleinert
und schließlich zu einem Punkt
zusammengezogen werden.



Eine geschlossene Kurve Γ, die keine Gleichgewichte in ihrem Inneren hat, kann stetig verkleinert und schließlich zu einem Punkt zusammengezogen werden.

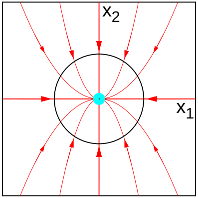


Damit wird φ entlang der (geschrumpften) Kurve konstant.

Deswegen gilt für alle solche Kurven: $I(\Gamma) = 0$.

Eine geschlossene Kurve Γ *mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden*.

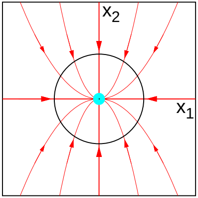
Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“.
Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:

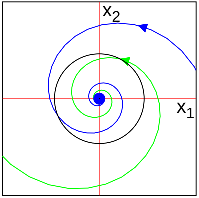


I(Knoten)$=1$

Eine geschlossene Kurve Γ *mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden*.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“.
Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:

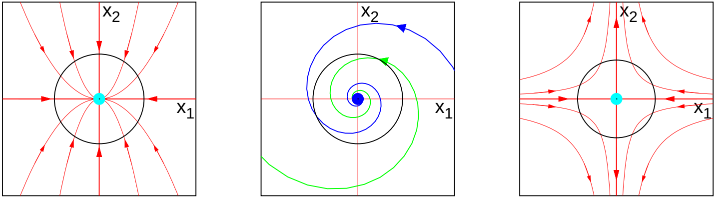




I(Knoten)$=1$ I(Fokus)$=1$

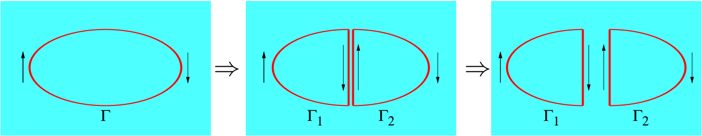
Eine geschlossene Kurve Γ *mit einem Gleichgewicht in ihrem Inneren kann zu diesem Gleichgewicht zusammengezogen werden*.

Dort kann man den Indexwert durch die Felddrehung direkt „ablesen“.
Dieser Wert wird dann auch dem Gleichgewicht zugeordnet:



I(Knoten)$=1$ $\quad$ I(Fokus)$=1$ $\quad$ I(Sattel)$=-1$

A. Der Index ist additiv:



B. Deswegen ist Index jeder geschlossenen Kurve
gleich der Summe von Indexwerten aller Gleichgewichte in deren Inneren.

C. Betrachten wir nun eine geschlossene Bahnkurve (Phasentrajektorie).
Da das Vektorfeld stets entlang der Bahn zeigt,
macht es insgesamt genau eine Umdrehung. $\Rightarrow$ $I(Bahnkurve) = 1$.

D. Aus B und C folgt:
innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegt mindestens ein Gleichgewicht.

Genauer:
innerhalb jeder geschlossenen Bahnkurve liegen $2n+1$ Gleichgewichte;
n davon sind Sattelpunkte (n=0,1,2,...).

Folge: Periodische Trajektorien in der Phasenebene dürfen
weder um einzelne Sattelpunkte herum, noch in den „leeren“ Bereichen liegen.

Themenwechsel: Integralsatz von Gauß (zwei-dimensional):

Es seien: a) S eine kompakte Menge in der Ebene mit dem Rand Γ,
und b) $\mathbf{F}$ ein stetig differenzierbares Feld auf dieser Ebene.

Dann gilt: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 dx_2 = \oint_\Gamma F_n d\Gamma$ (F_n – Normalkomponente von $\mathbf{F}$ auf dem Rand).

Bei einer Bahnkurve zeigt das Feld immer entlang der Bahn $\Rightarrow$ $F_n = 0$.

Damit gilt für jede geschlossene Bahn: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx_1 dx_2 = 0$.

Ist es wirklich selbstverständlich?

Das Integral von der Divergenz über das innere jeder geschlossenen Phasentrajektorie ist identisch Null !

Es folgt daraus ein negatives *Divergenz-Kriterium*:

in einem Gebiet der Phasenebene,
in dem die Divergenz vom $\boldsymbol{F}$ *keine Nulstellen aufweist*
(und damit überall dasselbe Vorzeichen hat),
können keine geschlossene Trajektorien liegen.

Falls beide rechte Seiten von

$$dx_1/dt \;=\; f_1(x_1, x_2), \quad dx_2/dt \;=\; f_2(x_1, x_2)$$

mit einer beliebigen positiven Funktion $g(x_1, x_2)$ multipliziert werden:

$$dx_1/dt \;=\; f_1(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2), \quad dx_2/dt \;=\; f_2(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2),$$

dann ändern sich die Vektorlängen, aber die Winkel bleiben invariant:

$$\varphi(x_1, x_2) = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)\, g(x_1, x_2)} = \arctan \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Das neue Vektorfeld richtet sich weiterhin entlang der Bahnkurven,
besitzt keine Normalkomponente zu den Bahnkurven,

deswegen gilt für jede geschlossene Bahnkurve:

$$\int_S \mathrm{div} \left(g(x_1, x_2)\, \mathbf{F}(x_1, x_2) \right) dx_1\, dx_2 = 0.$$

(Integration auf dem ganzen Innengebiet S dieser Kurve)

Dulac-Kriterium:

Es folgt ein negatives Kriterium für periodische Lösungen:

falls in einem Gebiet G $\exists$ eine stetig differenzierbare Funktion $g(x_1, x_2)$,

so dass $\forall (x_1, x_2) \in G$: $\begin{cases} g(x_1, x_2) > 0 \\ \text{div}\,(g(x_1, x_2)\,\boldsymbol{F}(x_1, x_2)) \neq 0 \end{cases}$

dann liegen in G keine geschlossenen Bahnkurven des dynamischen Systems $\boldsymbol{F}$.

Beispiel: Lotka-Volterra Gleichungen:

$$dx/dt = x\,(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1 x + \boldsymbol{\kappa}_1 y),$$
$$dy/dt = y\,(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_2 y + \boldsymbol{\kappa}_2 x)$$

mit positiven Selbstbeschränkungskoeffizienten $\boldsymbol{\beta}_{1,2}$ auf dem Gebiet $x, y > 0$.

Für $g(x,y) = \dfrac{1}{x\,y}$ *ergibt sich* $div(g(x,y)\boldsymbol{F}(x,y)) = -\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{y} - \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{x} < 0.$

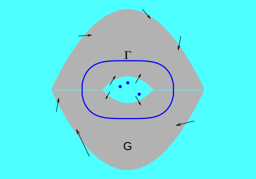
$\Rightarrow$ *LV-Gleichungen haben keine periodische Lösungen*
im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene (unabhängig von $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ und $\boldsymbol{\kappa}_{1,2}$) !

Poincaré-Bendixson-Kriterium:

Ein positives Kriterium für periodische Lösungen:

falls ∃ ein Gebiet G der Phasenebene, so dass
a) an dessen ganzer Grenze das Feld $\boldsymbol{F}$ „nach innen“ zeigt, und
b) in G keine Gleichgewichte liegen,
dann gibt es im Inneren von G
mindestens eine asymptotisch stabile geschlossene Bahnkurve.

▷ *Bemerkung:* Da die Trajektorien G nicht verlassen, muss im Inneren von G mindestens ein Attraktor liegen, und zwar kein Gleichgewicht.



G muss wenigstens ein „Loch“ haben:
wegen des Poincaré-Indexes muss es Gleichgewichte im Inneren der periodischen Lösung Γ geben,
die aber nicht im Inneren von G liegen dürfen.
Deswegen ist die Grenze von G
nicht zusammenhängend!

Lotka-Volterra Gleichungen:

$$dx/dt = x\,(\alpha_1 - \beta_1 x + \kappa_1 y),$$
$$dy/dt = y\,(\alpha_2 - \beta_2 y + \kappa_2 x)$$

mit positiven Selbstbeschränkungskoeffizienten $\boldsymbol{\beta}_{1,2}$
haben keine periodische Lösungen im Bereich $x, y > 0$ der Phasenebene
(unabhängig von $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ und $\boldsymbol{\kappa}_{1,2}$).

- *Die einzige verbliebene Möglichkeit: keine Selbstbeschränkung, $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = 0$.*

$$dx/dt = x\,(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 y), \qquad dy/dt = y\,(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\kappa}_2 x)$$

(Ursprüngliches Modell von Lotka (1925) und Volterra (1926) !)

- *Nur 2 Gleichgewichte:* $x = y = 0$ *und* $x = -\dfrac{\alpha_2}{\kappa_2},\ y = -\dfrac{\alpha_1}{\kappa_1}$.

$\Rightarrow$ *(α_1 und κ_1) sowie (α_2 und κ_2) haben unterschiedliche Vorzeichen.*

Beispiel:

$$\dot{x} = x\,(-2 + y)$$
$$\dot{y} = y\,(3 - x)$$

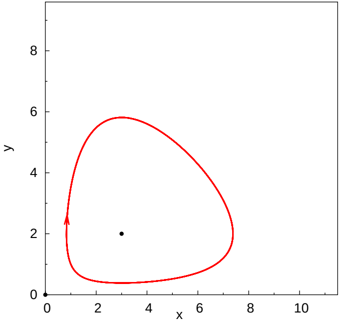
Räuber-Beute System: Räuber x stirbt schnell aus (verhungert) in Abwesenheit der Beute y.

Und die Beute y in Abwesenheit vom Räuber x erlebt uneingeschränktes Wachstum.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\,(-2+y)\\ \dot{y} &= y\,(3-x).\end{aligned}$$

Gleichgewichte: x=y=0 (Sattel!) und x=3, y=2 (Zentrumspunkt!!)

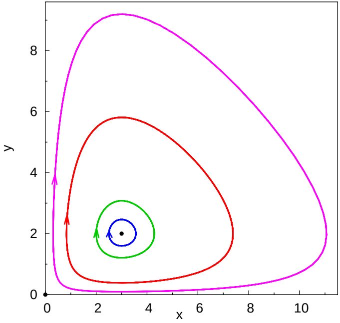
Numeriches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigesinn



$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(-2+y) \\ \dot{y} &= y\,(3-x). \end{aligned}$$

Gleichgewichte: x=y=0 (Sattel!) und x=3, y=2 (Zentrumspunkt!!)

Numeriches Integrieren:
Drehung im Uhrzeigesinn



Jeder Punkt im positiven Quadrant liegt auf einer geschlossenen Phasenbahn: Ein Kontinuum von periodischen Lösungen, mit Zentrumspunkt in der Mitte.

Maxima für Räuber x folgen den Maxima für Beute y mit Zeitverzögerung.

$$\frac{dx}{dt} = x\,(\alpha_1 + \kappa_1 y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y\,(\alpha_2 + \kappa_2 x).$$

Gleichung der Phasenkurven: $\frac{dx}{dy} = \frac{x\,(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y\,(\alpha_2 + \kappa_2 x)}$

Variablentrennung: $\frac{dx\,(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \frac{dy\,(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y}$

Integrieren: $\int \frac{dx\,(\alpha_2 + \kappa_2 x)}{x} = \int \frac{dy\,(\alpha_1 + \kappa_1 y)}{y} + C$

Ergebnis: Kurvengleichung $\kappa_2 x + \alpha_2 \ln x - \kappa_1 y - \alpha_1 \ln y = C$

Jedem Wert der Konstante C („Energie“?)
entspricht eine geschlossene Bahnkurve: periodische Bewegung.

Dabei in Koordinaten x, y ist es kein Hamiltonsches System:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{F}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \kappa_1 y + \kappa_2 x \neq 0.$$

Es stimmt aber für die Mittelwerte (gemittelt über die Periode):

$$\langle \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) \rangle = \alpha_1 + \alpha_2 + \kappa_1 \langle y \rangle + \kappa_2 \langle x \rangle = 0.$$