Vorlesung 6.

# Bifurkationen I: Allgemeine Überlegungen; Invariante Mannigfaltigkeiten

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein $N$-Vektor mit Komponenten $\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big)$ zugeordnet.

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein $N$-Vektor mit Komponenten $\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big)$ zugeordnet.

- Gesamtheit dieser Felder bildet auch einen Raum:

  Raum dynamischer Systeme $N$-ter Ordnung.

Jeder Punkt in diesem Raum ist ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein $N$-Vektor mit Komponenten $\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big)$ zugeordnet.

- ▷ Gesamtheit dieser Felder bildet auch einen Raum:

  Raum dynamischer Systeme $N$-ter Ordnung.

Jeder Punkt in diesem Raum ist ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

Kontrollparameter werden zu Koordinaten in diesem Raum.

*(deswegen spricht man auch vom Parameterraum)*:

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits
bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein $N$-Vektor mit Komponenten
$\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big)$ zugeordnet.

- Gesamtheit dieser Felder bildet auch einen Raum:
  Raum dynamischer Systeme $N$-ter Ordnung.

Jeder Punkt in diesem Raum ist ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

Kontrollparameter werden zu Koordinaten in diesem Raum.
*(deswegen spricht man auch vom Parameterraum)*:

$m$ Parameter $\Rightarrow$ $m$-dimensionaler Parameterraum.

Bifurkationen: qualitative Änderungen des Phasenportraits
bei infinitesimalen Variationen des Kontrollparameters.

Geometrische Darstellung: Ein dynamisches System $N$-ter Ordnung

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$$

definiert im $N$-dimensionalen Phasenraum ein Vektorfeld:

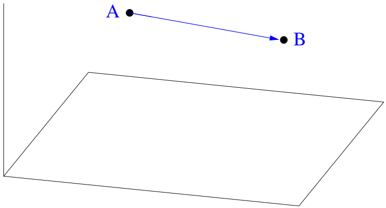
jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_N)$ wird ein $N$-Vektor mit Komponenten
$\big(F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, x_N)\big)$ zugeordnet.

- Gesamtheit dieser Felder bildet auch einen Raum:
  Raum dynamischer Systeme $N$-ter Ordnung.
  Jeder Punkt in diesem Raum ist ein Vektorfeld (ein dynamisches System).

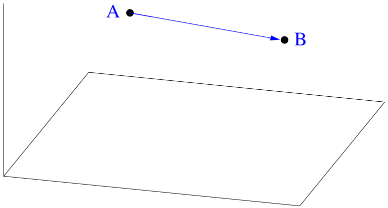
  Kontrollparameter werden zu Koordinaten in diesem Raum.
  *(deswegen spricht man auch vom Parameterraum)*:

  $m$ Parameter $\Rightarrow$ $m$-dimensionaler Parameterraum.
- Variation von einem/mehreren Kontrollparameter:
  Bewegung durch den Parameterraum, kontinuierliche Änderung vom System.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Keine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

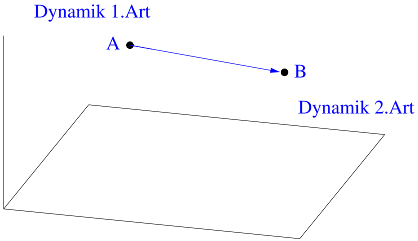


Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Keine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

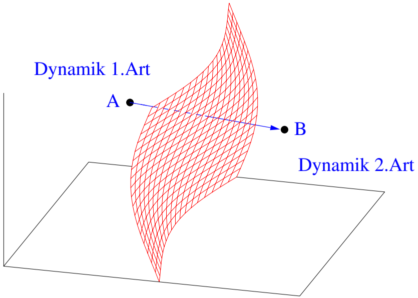



Jeder Pfad von $A$ nach $B$ ist durch einen Parameter parametrisierbar:
1-param. Famile von DS

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



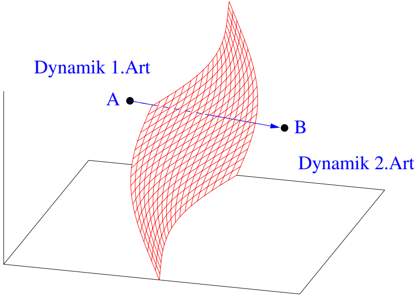
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Unterwegs findet eine Bifurkation statt.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

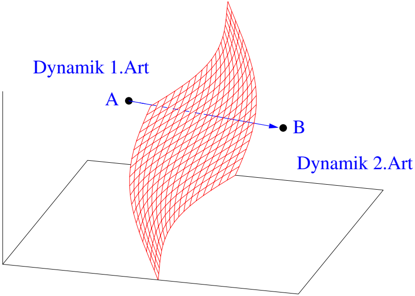
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Unterwegs findet eine Bifurkation statt.

Gebiete mit derselben qualitativen Dynamik *(selbe Anzahl von Gleichgewichten, selbe Anzahl von positiven/negativen Eigenwerten bei jedem davon usw.)* sind $m$-dimensionale Objekte im $m$-dimensionalen Parameterraum.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



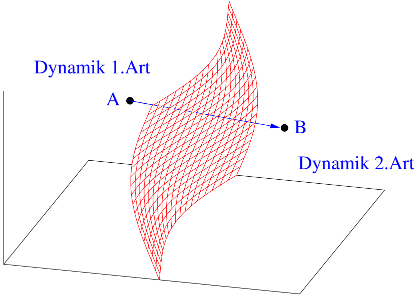

Unterwegs findet eine Bifurkation statt.

Gebiete mit derselben qualitativen Dynamik *(selbe Anzahl von Gleichgewichten, selbe Anzahl von positiven/negativen Eigenwerten bei jedem davon usw.)* sind $m$-dimensionale Objekte im $m$-dimensionalen Parameterraum.

▷ Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt, die diese Gebiete voneinander trennen.

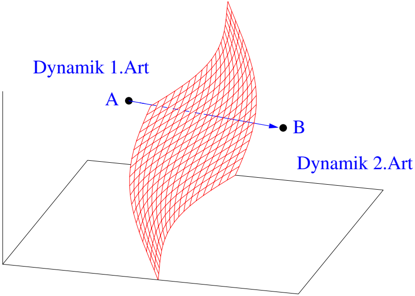
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt:

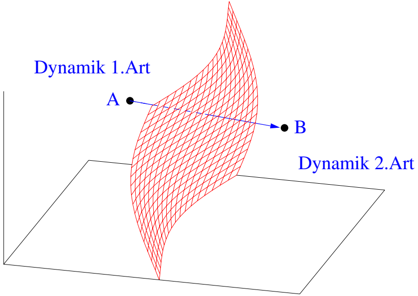
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt:

- für Systeme mit einem Parameter ($m=1$) – in den Punkten,

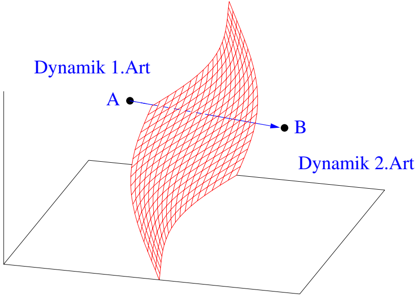
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt:

- für Systeme mit einem Parameter $(m=1)$ – in den Punkten,
- für Systeme mit zwei Parametern $(m=2)$ – auf den Linien,

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



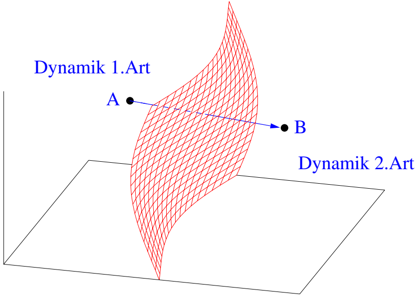

Bifurkationen finden an $(m{-}1)$-dimensionalen Flächen statt:

- für Systeme mit einem Parameter (m=1) – in den Punkten,
- für Systeme mit zwei Parametern (m=2) – auf den Linien,
- für Systeme mit drei Parametern (m=3) – auf den 2D-Flächen,

...

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m\!-\!1)$-dimensionalen Flächen statt:

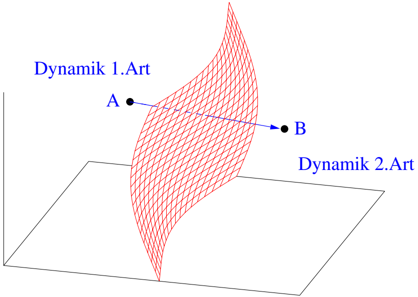
- für Systeme mit einem Parameter (m=1) – in den Punkten,
- für Systeme mit zwei Parametern (m=2) – auf den Linien,
- für Systeme mit drei Parametern (m=3) – auf den 2D-Flächen,

...

- Dabei kann es in allen Fällen dieselbe Bifurkation sein
  *(z.B. Zusammenstoß und Verschwinden von zwei Gleichgewichten)*

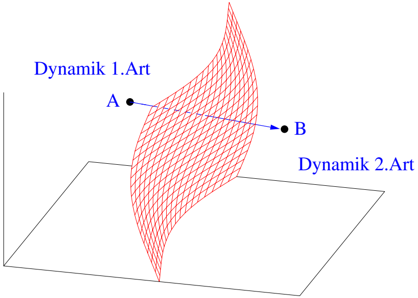
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m–1)$-dimensionalen Flächen statt.

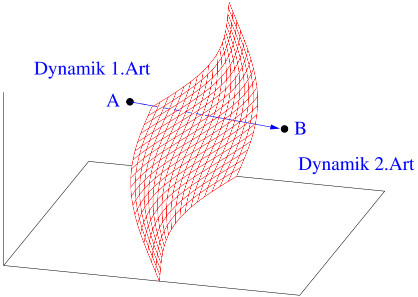
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m\!-\!1)$-dimensionalen Flächen statt.
Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

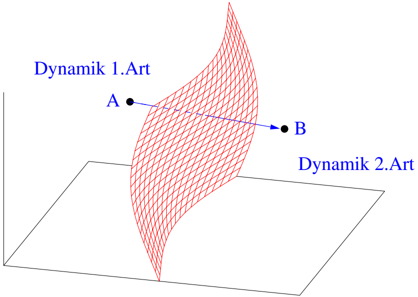



Bifurkationen finden an $(m-1)$-dimensionalen Flächen statt.

Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.

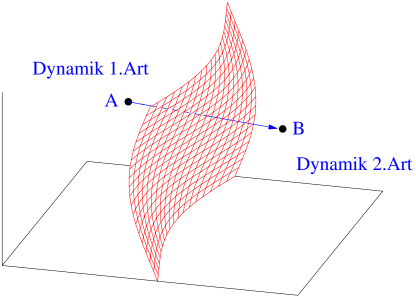



Bifurkationen finden an $(m–1)$-dimensionalen Flächen statt.
Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,
- oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, ...

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Bifurkationen finden an $(m–1)$-dimensionalen Flächen statt.

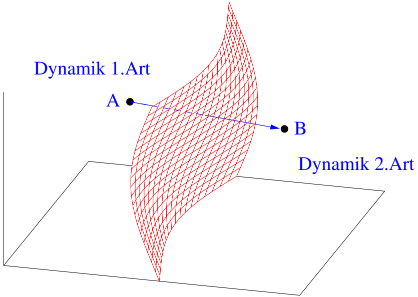
Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,
- oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, …

Gesamtanzahl dieser Bedingungen nennt man Kodimension:

Dimension, die bis zur „vollen“ $(m)$ fehlt.

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.



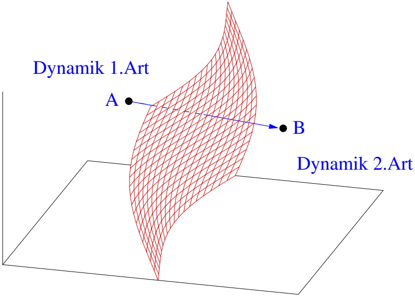

Bifurkationen finden an $(m–1)$-dimensionalen Flächen statt.
Besondere Bedingungen werden aufgezählt:

- z. B. reeller Eigenwert einer Jakobi-Matrix verschwindet,
- oder ein komplexes Paar von Eigenwerten wird rein imaginär, ...

Gesamtanzahl dieser Bedingungen nennt man Kodimension:
Dimension, die bis zur „vollen" $(m)$ fehlt.

*(z.B. Zusammenstoß von zwei Gleichgewichten hat Kodimension 1.)*

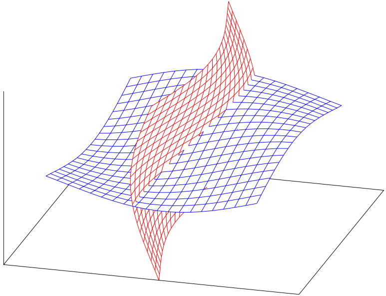
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Eine qualitative Änderung der Dynamik auf dem Weg.




Beispiel von Bifurkation mit Kodimension 1
(Bifurkationsfläche trennt voneinander Volumen im Parameterraum)

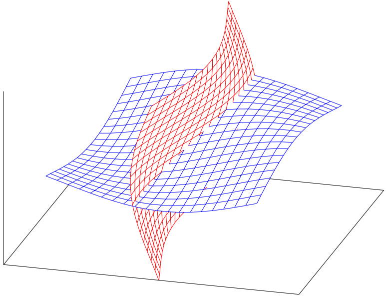
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



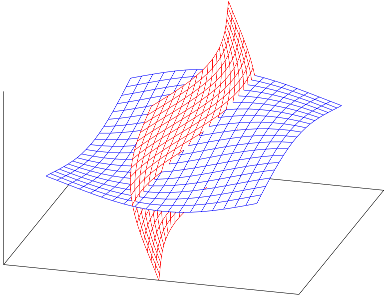
Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



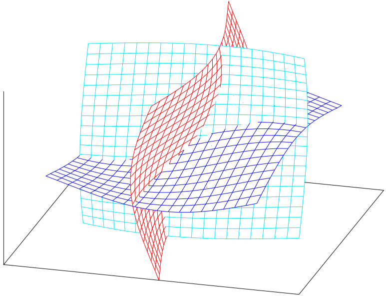
Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



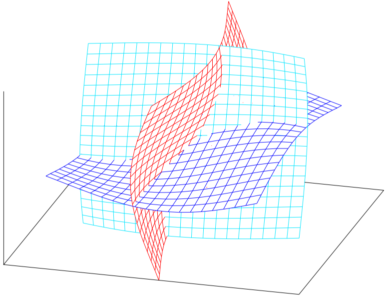
Zwei unterschiedliche Bifurkationsflächen:
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;
ihr gemeinsames Auftreten hat Kodimension 2:
*„fehlende" Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum*

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



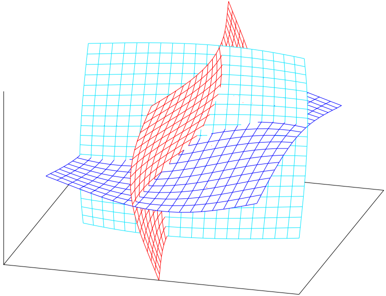
Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

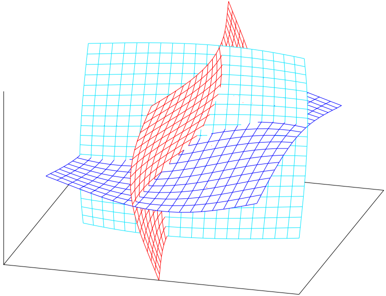
Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;
gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.

Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.



Drei unterschiedlichen Bifurkationsflächen:

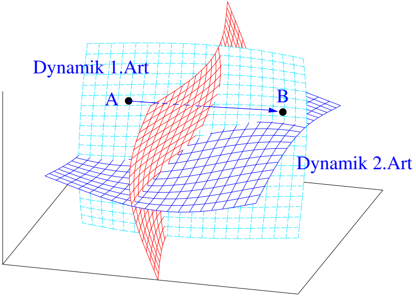
jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

*„fehlende“ Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum*

Variation des Kontrollparameters: Bewegung durch den Parameterraum.
Mehrere qualitative Änderungen der Dynamik auf dem Weg.




Drei unterschiedliche Bifurkationsflächen:

jede Bifurkation alleine hat Kodimension 1;

gemeinsames Auftreten von zwei hat Kodimension 2;

gemeinsames Auftreten von allen drei hat Kodimension 3;

*„fehlende" Dimension bei deren Schnittmenge im Parameterraum*

*Wichtig: Es sind in 1-parametrigen Familien von dynamischen Systemen nur Bifurkationen von Kodimension 1 prinzipiell unvermeidbar.*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

# Invariante Mannigfaltigkeiten

▷ Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
*Gesamtheit aller Anfangspunkten* $\boldsymbol{x}$ *von Trajektorien, die bei* $t \to \infty$ *gegen* $\boldsymbol{x}_0$ *streben:* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

▷ Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
*Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,*
*die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben:* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

*(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^s$ gleich Einzugsgebiet).*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,*
  *die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben:* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

*(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^s$ gleich Einzugsgebiet).*

- Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,*
  *die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben:* $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten* $\boldsymbol{x}$ *von Trajektorien,*
  *die bei* $t \to \infty$ *gegen* $\boldsymbol{x}_0$ *streben:* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  *(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^s$ gleich Einzugsgebiet).*
- Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten* $\boldsymbol{x}$ *von Trajektorien,*
  *die bei* $t \to -\infty$ *gegen* $\boldsymbol{x}_0$ *streben:* $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  *(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^u$ besteht nur aus $\boldsymbol{x}_0$ selbst).*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,*
  *die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben:* $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  *(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^s$ gleich Einzugsgebiet).*
- Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  *Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,*
  *die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben:* $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  *(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: $W^u$ besteht nur aus $\boldsymbol{x}_0$ selbst).*

  Beide sind offensichtlich invariant:
  jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu $W^s$
  jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu $W^u$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten ($W^s$ von $A$ und $W^s$ von $B$ oder $W^u$ von $A$ und $W^u$ von $B$) können sich im Phasenraum nicht schneiden.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

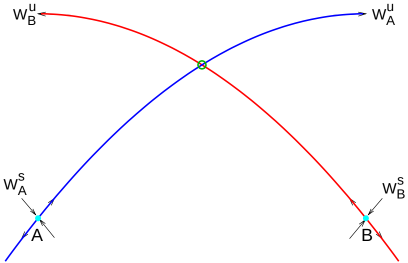
***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

▷ Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
($W^s$ von $A$ und $W^s$ von $B$ oder $W^u$ von $A$ und $W^u$ von $B$)
können sich im Phasenraum nicht schneiden.
*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt:*
*der Schnittpunkt hätte 2 Zukunften oder 2 Vergangenheiten)*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem Dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  ($W^s$ von $A$ und $W^s$ von $B$ oder $W^u$ von $A$ und $W^u$ von $B$)
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.
  *(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt:*
  *der Schnittpunkt hätte 2 Zukunften oder 2 Vergangenheiten)*




unmöglich !

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten*
  ~~*können sich im Phasenraum schneiden*~~
  *können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*

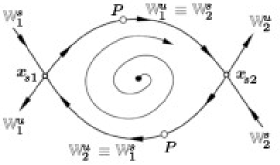
# Invariante Mannigfaltigkeiten

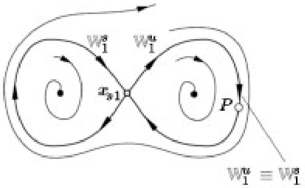
***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten*
  *~~können sich im Phasenraum schneiden~~*
  *können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*



# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

  *(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*
- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

  *(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*
- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten*
  *können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*
- *Eine Trajektorie* $\Gamma(t)$ *vom Gleichgewicht* $A$ *zum Gleichgewicht* $B$*:*
  $(\lim_{t\to-\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A},\ \ \lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{B})$
  *heißt Heterokline* (biasymptotische Trajektorie)
  heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.

*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ vom Gleichgewicht $A$ zum Gleichgewicht $B$:*

  $$(\lim_{t\to-\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A},\ \ \lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{B})$$

  *heißt Heterokline* (biasymptotische Trajektorie)

  heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ von $A$ nach $A$:* $\lim_{t\to\pm\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A}$

  *heißt Homokline* (biasymptotische Trajektorie)

  homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- **Gleichnamige** Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten
  können sich im Phasenraum nicht schneiden.

*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten*
  *können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ vom Gleichgewicht $A$ zum Gleichgewicht $B$:*
  $(\lim_{t\to-\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A},\ \lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{B})$
  *heißt Heterokline* (biasymptotische Trajektorie)
  heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- *Eine Trajektorie $\Gamma(t)$ von $A$ nach $A$:* $\lim_{t\to\pm\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A}$
  *heißt Homokline* (biasymptotische Trajektorie)
  homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

*Da eine Homokline eine geschlossene Bahn bildet,*
*ist sie ein Grenzfall: periodische Bewegung mit unendlicher Periodendauer.*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

***A*** und ***B***: zwei instabile Gleichgewichte in einem dynamischen System.

- Gleichnamige Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten können sich im Phasenraum nicht schneiden.

*(sonst wäre der Eindeutigkeitssatz verletzt: 2 Zukunften / 2 Vergangenheiten)*

- *Unterschiedliche Mannigfaltigkeiten von zwei Gleichgewichten können im Phasenraum glatt ineinander übergehen.*
- *Eine Trajektorie* $\Gamma(t)$ *vom Gleichgewicht* $A$ *zum Gleichgewicht* $B$*:*
  $(\lim_{t\to-\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A},\ \lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{B})$
  *heißt Heterokline* (biasymptotische Trajektorie)
  heteroclinic orbit, biasymptotic trajectory, saddle connection.
- *Eine Trajektorie* $\Gamma(t)$ *von* $A$ *nach* $A$ *:* $\lim_{t\to\pm\infty}\Gamma(t) = \boldsymbol{A}$
  *heißt Homokline* (biasymptotische Trajektorie)
  homoclinic orbit, biasymptotic trajectory.

*Da eine Homokline eine geschlossene Bahn bildet,*
*ist sie ein Grenzfall: periodische Bewegung mit unendlicher Periodendauer.*
*Ähnlich: Verbindung zweier Heteroklinen* $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}$ (heteroclinic contour)
*ist ebenso eine geschlossene Bahn.*

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

## Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.

  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.

  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im $U^n$ anfängt, endet in $x_0$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.

  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.

- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im $U^n$ anfängt, endet in $x_0$.

  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören)*.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.

  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im $U^n$ anfängt, endet in $x_0$.

  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören)*.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die außerhalb $U^n$ anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht $x_0$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.
  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im $U^n$ anfängt, endet in $x_0$.
  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören)*.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die außerhalb $U^n$ anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht $x_0$.
  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit nicht gehören)*.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts $x_0$.

*(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik)*.

- Sei $n$ Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht $x_0$ mit negativen reellen Teilen.
  $n$ Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen $n$-dimensionalen linearen Unterraum $U^n$.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im $U^n$ anfängt, endet in $x_0$.
  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören)*.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die außerhalb $U^n$ anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht $x_0$.
  *(und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit nicht gehören)*.

$\Rightarrow$ Auch bei dem ursprünglichen nichtlinearisierten System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von $x_0$) $n$-dimensional sein.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \;\; \forall\, i$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \ \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte $\lambda$ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \ \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte $\lambda$ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- $n$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \leq n \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $n$-dim. linearen Unterraum $E^n$,

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \ \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte $\lambda$ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- $n$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \le n \le N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $n$-dim. linearen Unterraum $E^n$,
- $p$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \le p \le N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $p$-dim. linearen Unterraum $E^p$.

es gilt $\quad n + p = N$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \;\; \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte $\lambda$ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- $n$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \le n \le N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $n$-dim. linearen Unterraum $E^n$,
- $p$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \le p \le N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $p$-dim. linearen Unterraum $E^p$.

es gilt $\quad n + p = N$.

- Satz: Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension $n$; c) ist genauso glatt wie $\boldsymbol{F}$, und
  d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum $E^n$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System $N$-er Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem *hyperbolischen* Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\mathbf{0}) = 0 \ \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte $\lambda$ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- $n$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \leq n \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $n$-dim. linearen Unterraum $E^n$,
- $p$ Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \leq p \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $p$-dim. linearen Unterraum $E^p$.

es gilt $\quad n + p = N$.

- Satz: Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension $n$; c) ist genauso glatt wie $\boldsymbol{F}$, und
  d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum $E^n$.
- Satz: Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension $p$; c) ist genauso glatt wie $\boldsymbol{F}$, und
  d) tangiert am Gleichgewicht den linearen Raum $E^p$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x, y), \quad dy/dt = g(x, y); \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$$

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x, y), \quad dy/dt = g(x, y); \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$$

- da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide 1-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- ▷ da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide 1-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?
- ▷ z.B. stabile Mannigfaltigkeit $W^s$:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide 1-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?
- z.B. stabile Mannigfaltigkeit $W^s$:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- Als eine Linie, kann $W^s$ (lokal !) durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. durch x: $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide $1$-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?
- z.B. stabile Mannigfaltigkeit $W^s$:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- Als eine Linie, kann $W^s$ (lokal !) durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. durch x: $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$.
- Substitution in die 2.Gleichung $+$ Kettenregel ergeben

$$h'(x)\, f\big(x, h(x)\big) \;=\; g\big(x, h(x)\big),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide 1-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?
- z.B. stabile Mannigfaltigkeit $W^s$:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- Als eine Linie, kann $W^s$ (lokal !) durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. durch x: $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$.
- Substitution in die 2.Gleichung $+$ Kettenregel ergeben

$$h'(x)\, f\big(x, h(x)\big) \;=\; g\big(x, h(x)\big),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

- Falls jedoch der entsprechende Eigenvektor orthogonal zur $x$-Achse steht,
  dann muss die Parametrierung durch $y$ gewählt werden: $x = g(y)$ mit unbekannter Fkn. $g(y)$.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2.Ordnung mit einem Sattelpunkt im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- ▷ da $n = p = 1$, sind $W^s$ und $W^u$ beide 1-dimensional *(kurvenförmig)*.
  Wo liegen sie in der Phasenebene?
- ▷ z.B. stabile Mannigfaltigkeit $W^s$:
  eine Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert,
  der dem negativen Eigenwert der Jacobi-Matrix entspricht.
- ▷ Als eine Linie, kann $W^s$ (lokal !) durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. durch x: $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$.
- ▷ Substitution in die 2.Gleichung + Kettenregel ergeben

$$h'(x)\, f\big(x, h(x)\big) \;=\; g\big(x, h(x)\big),$$

eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.

- ▷ Falls jedoch der entsprechende Eigenvektor orthogonal zur $x$-Achse steht,
  dann muss die Parametrierung durch $y$ gewählt werden: $x = g(y)$ mit unbekannter Fkn. $g(y)$.
- ▷ Explizit ist diese Gleichung meist nicht lösbar,
  aber sukzessiv kann man $h(x)$ (bzw. $g(y)$) durch die Potenzreihe bestimmen.

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

  *(Lage vom Gleichgewicht:* $a_0 = 0$*, Richtung vom Eigenvektor:* $a_1 = 0$*).*

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$)*.
- Einsetzen in $h' \dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x\\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

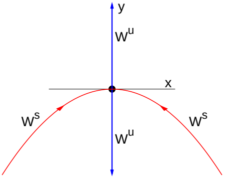
  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$)*.
- Einsetzen in $h' \dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht:* $a_0 = 0$, *Richtung vom Eigenvektor:* $a_1 = 0$*)*.
- Einsetzen in $h' \dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\dfrac{x^2}{3}$.

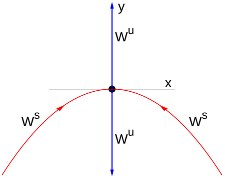


# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).*
- Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\dfrac{x^2}{3}$.




- Instabile Mannigfaltigkeit (in diesem Fall trivial): y-Achse $x = 0$.

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + b\,y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\dot{x} = -x + b\,y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\dot{x} = -x + b\,y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + b\,y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + b\,y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).*

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + b\,y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2 \end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$)*.
- Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$

## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + b\,y^2 \\ \dot{y} &= y + x^2\end{aligned}$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

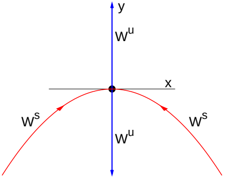
  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).*
- Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$

# Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\dot{x} = -x + b\,y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht:* $a_0 = 0$, *Richtung vom Eigenvektor:* $a_1 = 0$*).*
- Einsetzen in $h'\dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{b\,x^5}{81} - \dfrac{b^2\,x^8}{729} \ldots$

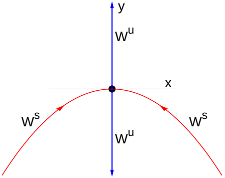


## Invariante Mannigfaltigkeiten: Bestimmung

$$\dot{x} = -x + b\,y^2$$
$$\dot{y} = y + x^2$$

- Gleichgewicht im Ursprung. Eigenwerte: $1$ and $-1$. Eigenvektoren: Achsen.
- Stabile Mannigfaltigkeit $W^s$ tangiert im Ursprung die $x$-Achse.
  Instabile Mannigfaltigkeit $W^u$ tangiert im Ursprung die $y$-Achse.
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

  *(Lage vom Gleichgewicht: $a_0 = 0$, Richtung vom Eigenvektor: $a_1 = 0$).*
- Einsetzen in $h' \dot{x} = \dot{y} = h(x) + x^2$
- $\Rightarrow \quad a_2 = -1/3, \quad a_3 = a_4 = \ldots = 0$
- Stabile Mannigfaltigkeit: $y = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{b\,x^5}{81} - \dfrac{b^2\,x^8}{729} \ldots$




- Instabile Mannigfaltigkeit: $x = 0 + \dfrac{b\,y^2}{3} - \dfrac{b^3 y^5}{81} + \dfrac{b^5 y^8}{729} \ldots$