Vorlesung 7.

Bifurkationen II:

Zentrumsmannigfaltigkeit.

Normalformen.

Auf den ersten Blick können die Bifurkationen
in jedem dynamischen System `anders` aussehen.

1. Als eine qualitative Veränderung vom Phasenportrait gilt z.B. sowohl die Änderung an der Anzahl von den Gleichgewichten wie auch deren Stabilitätsverlust.

   Sind es zwei unterschiedliche Arten von Bifurkationen, oder sind sie miteinander verbunden?

2. Welche Rolle spielt Dimension des Phasenraums?

   Gibt es z.B. Unterschiede bei den Bifurkationen von Gleichgewichten in den Systemen 2., 22. und 222. Ordnung?

3. Anwesenheit einer Bifurkation erkennen wir an dem Verhalten von Eigenwerten ($\mathrm{Re}(\lambda)=0$), also an der `Linearisierung`.

   Welche Rolle, wenn überhaupt, spielen die Nichtlinearitäten, wie werden sie berücksichtigt?

   Kann man die Taylor-Reihe „beschneiden“ ohne Änderungen bei der Dynamik, und falls ja, wo?

Es stellt sich heraus,
dass es bei den Bifurkationen von Gleichgewichten
gar nicht so viele Varianten gibt.

1. Dimensionsreduktion: Zentrumsmannigfaltigkeitsatz verwandelt
   die nötige Dimension des Phasenraums in 1 oder 2.

2. Komplexitätsreduktion:
   es gibt (nichtlineare) Transformationen der Koordinaten,
   bei welchen die meisten nichtlinearen Summanden der Taylorreihe
   identisch verschwinden.

Das, was von der Taylorreihe übrig bleibt, heißt Normalform.
Nur sie muss schließlich analysiert werden.

Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit W^s eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^s gleich Einzugsgebiet).

- *Instabile Mannigfaltigkeit W^u eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:*
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

(bei einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht: W^u ist nur $\boldsymbol{x}_0$ selbst).

Beide sind offensichtlich invariant:
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu W^s
jeder Punkt auf einer Bahn, die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ strebt, gehört zu W^u.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir linearisieren die Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts x_0.

(hinreichend nah, gibt es kaum Unterschiede in der Dynamik).

- Sei n Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht x_0 mit negativen reellen Teilen.
  n Eigenvektoren, die diesen Eigenwerten entsprechen, definieren einen n-dimensionalen linearen Unterraum U^n.
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die im U^n anfängt, endet in x_0.

  (und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit gehören).
- Jede Trajektorie linearisierter Gleichungen, die außerhalb U^n anfängt, führt schließlich weg vom Gleichgewicht x_0.

  (und sollte damit dessen stabilen Mannigfaltigkeit nicht gehören).

$\Rightarrow$ Auch bei dem ursprünglichen nichtlinearisierten System sollte die stabile Mannigfaltigkeit (zumindest in der Nähe von x_0) n-dimensional sein.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N-ter Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem hyperbolischen Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\boldsymbol{0}) = 0 \;\; \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in zwei Gruppen:

- n Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \leq n \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen n-dim. linearen Unterraum E^n,
- p Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \leq p \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen p-dim. linearen Unterraum E^p.

$$n + p = N.$$

- Satz: Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension n; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^n.
- Satz: Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension p; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^p.
- So weit so gut. Aber beim Verlust der Stabilität eines Gleichgewichtes gilt $\mathrm{Re}(\lambda)=0$: das System wird nicht-hyperbolisch!

  Zwecks Beschreibung der Bifurkationen muss das Bild erweitert werden.

Invariante Mannigfaltigkeiten

Dynamisches System N-ter Ordnung: $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N$,
mit einem **nicht**-hyperbolischen Gleichgewicht im Ursprung: $F_i(\boldsymbol{0}) = 0 \;\; \forall\, i$.

Wir teilen alle Eigenwerte λ von der Jacobi-Matrix in **drei** Gruppen:

- n Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad (0 \leq n \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $\boldsymbol{n}$-dim. linearen Unterraum E^n,
- p Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad (0 \leq p \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $\boldsymbol{p}$-dim. linearen Unterraum E^p,
- z Eigenwerten mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0 \quad (0 \leq z \leq N)$;
  Eigenvektoren definieren einen $\boldsymbol{z}$-dim. linearen Unterraum E^z.

$$\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{z} = N.$$

- Satz: Stabile Mannigfaltigkeit W^s des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension n; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^n.
- Satz: Instabile Mannigfaltigkeit W^u des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension p; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^p.
- Satz: Zentrumsmannigfaltigkeit W^z des Gleichgewichts:
  a) existiert; b) hat Dimension z; c) tangiert am Gleichgewicht den Raum E^z.

... und ist nicht unbedingt eindeutig ...

Invariante Mannigfaltigkeiten

- Stabile Mannigfaltigkeit W^s eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to \infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.
- *Instabile Mannigfaltigkeit W^u eines Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0$:*
  Gesamtheit aller Anfangspunkten $\boldsymbol{x}$ von Trajektorien,
  die bei $t \to -\infty$ gegen $\boldsymbol{x}_0$ streben: $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

  Beide sind offensichtlich invariant.
- Im Gegensatz zu W^s und W^u wird die Zentrumsmannigfaltigkeit W^z nicht durch die asymptotischen Eigenschaften bei $t \to \pm\infty$ definiert, sondern lediglich durch die Berührung am Gleichgewicht mit dem linearen Unterraum E^z und durch die Invarianz.
  Die zeitliche Asymptotik *(Zum Gleichgewicht? Weg vom Gleichgewicht?)* muss man erst bestimmen!
- In diesem Sinne könnte man den Satz umformulieren:
  es $\exists$ eine invariante z-dimensionale Mannigfaltigkeit *(Zentrumsmannigfaltigkeit genannt)*,
  die am Gleichgewicht den linearen Unterraum E^z tangiert.

- Wir übergehen nun zu den neuen Koordinaten (Variablen),
  die sich in drei Gruppen aufteilen:
  a) n Koordinaten α_j aus dem linearen Unterraum E^n
  b) p Koordinaten β_j aus dem linearen Unterraum E^p
  c) z Koordinaten ζ_j aus dem linearen Unterraum E^z

- Dann nimmt das System folgende Form an:

$$\dot{\vec{\alpha}} = A\,\vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \qquad (n \text{ Gleichungen})$$
$$\dot{\vec{\beta}} = B\,\vec{\beta} + \Phi_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \qquad (p \text{ Gleichungen})$$
$$\dot{\vec{\zeta}} = C\,\vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \qquad (z \text{ Gleichungen})$$

  wo alle Funktionen $\Phi_{\vec{\alpha}}, \Phi_{\vec{\beta}}, \Phi_{\vec{\zeta}}$ nichtlinear sind
  (d.h. verschwinden im Ursprung samt allen ersten partiellen Ableitungen),
  alle Eigenwerte der $(n \times n)$ Matrix A negative reelle Teile haben,
  alle Eigenwerte der $(p \times p)$ Matrix B positive reelle Teile haben,
  und reelle Teile von allen Eigenwerten der $(z \times z)$ Matrix C Null sind.

Einem asymptotisch stabilen Gleichgewicht entspricht $p = z = 0$.

Beim kritischen Parameterwert gilt für z Eigenwerte: $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.

Dann verkürzt sich das System

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\alpha}} &= A\,\vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}\,(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \\ \dot{\vec{\beta}} &= B\,\vec{\beta} + \Phi_{\vec{\beta}}\,(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta})) \\ \dot{\vec{\zeta}} &= C\,\vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}\,(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\zeta}) \end{aligned}$$

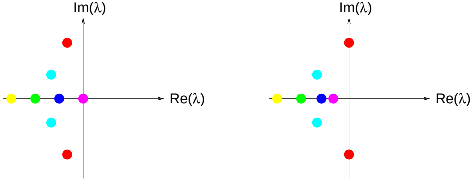
auf

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\alpha}} &= A\,\vec{\alpha} + \Phi_{\vec{\alpha}}\,(\vec{\alpha}, \vec{\zeta}) \qquad &(n \text{ Gleichungen}) \\ \dot{\vec{\zeta}} &= C\,\vec{\zeta} + \Phi_{\vec{\zeta}}\,(\vec{\alpha}, \vec{\zeta}) \qquad &(z \text{ Gleichungen}) \end{aligned}$$

Die n Variablen $\vec{\alpha}$ entsprechen der stabilen Mannigfaltigkeit W^s.
Die z Variablen $\vec{\zeta}$ entsprechen der Zentrumsmannigfaltigkeit W^z.

Wegen den negativen Eigenwerten von A klingen die Variablen $\vec{\alpha}$ schnell ab,
und das System bewegt sich dann langsam
entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit W^z.

In generischen parameterabhängigen dynamischen Systemen verschwindet bei Stabilitätsverlust eines Gleichgewichts reeller Teil von einem (reellen) oder zwei (komplex-konjugierten) Eigenwerten der Jacobi-Matrix.



Dementsprechend ist Zentrumsmannigfaltigkeit in diesen Fällen ein- bzw. zweidimensional.

Da die ganze „langsame“ Evolution vom Gesamtsystem ausschließlich entlang der Zentrumsmannigfaltigkeit stattfindet (alle andere Variablen passen sich relativ schnell an), reduziert sich das zulässige Verhalten beim Stabilitätsverlust auf ein- bzw. zweidimensionale Dynamik . . .

. . . unabhängig von der Gesamtdimension vom Phasenraum.

Zentrumsmannigfaltigkeit: Bestimmung

Beispiel: Dynamisches System 2. Ordnung
mit einem nichthyperbolischen Gleichgewicht im Ursprung:

$$dx/dt = f(x,y), \quad dy/dt = g(x,y); \quad f(0,0) = g(0,0) = 0.$$

- bei $p = 0$, $n = z = 1$, sind W^s und W^z beide 1-dimensional.
- Zentrumsmannigfaltigkeit W^z:
  eine invariante Kurve, die im Ursprung den Eigenvektor tangiert, der dem Eigenwert 0 der Jacobi-Matrix entspricht.
- Als eine Linie, kann W^z lokal durch eine Koordinate parametriert werden,
  z.B. als $y = h(x)$ mit unbekannter Fkn. $h(x)$
- Methode, die wir durch die Bestimmung von W^s und W^u schon kennen:
  Substitution in die 2.Gleichung und Kettenregel ergeben

$$h'(x) f\big(x, h(x)\big) \;=\; g\big(x, h(x)\big),$$

  eine gewöhnliche DGL bezüglich der Funktion $h(x)$.
- Weiter sukzessiv mittels der Potenzreihe: $h(x) = h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 \ldots$
- Und schließlich Dynamik auf der W^z: $dx/dt \;=\; f\big(x, h(x)\big)$.

Normalformen

- Idee: Koordinatentransformation (nichtlinear, lokal umkehrbar).
- Ziel: möglichst viele nichtlineare Summanden der Taylorreihe loswerden.

$$\dot{x} = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 + \dots \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\tilde{x}} = a\tilde{x}$$

- Mittel: fast identische *(nearly identical)* Transformationen:

$$x \longrightarrow \tilde{x} \;+\; \beta_2\tilde{x}^2 \;+\; \beta_3\tilde{x}^3 \;+\; \dots$$

- Beispiel: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 & (1) \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a x_1^3 \quad \text{(kubische Nichlinearität)} & (2) \end{cases}$

$$\text{Transformation} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + \dfrac{a}{3\lambda_1 - \lambda_2}\, y_1^3 \end{cases}$$

Einsetzen in (1): $\dot{y}_1 = \lambda_1\, y_1$

Einsetzen in (2) links: $\dot{y}_2 + \dfrac{3a\, y_1^2 \dot{y}_1}{3\lambda_1 - \lambda_2} = \dot{y}_2 + \dfrac{3a\lambda_1\, y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2}$

Einsetzen in (2) rechts: $\lambda_2 y_2 + \dfrac{a\lambda_2 y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2} + a y_1^3$

(2) links $=$ (2) rechts $\quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 + \dfrac{3a\lambda_1\, y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2} = \lambda_2 y_2 + \dfrac{3a\lambda_1\, y_1^3}{3\lambda_1 - \lambda_2}$

Normalformen

- Aufgabe: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a\, x_1^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + \dfrac{a}{3\lambda_1 - \lambda_2}\, y_1^3 \end{cases}$
- Ergebnis: $\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ Ziel erreicht !
- *Frohe Botschaft*: es klappt fast immer:
  bei beliebigen Werten von a
  und fast allen Kombinationen von λ_1 und λ_2.
- *Aber:* falls es mit *dieser* Transformation nicht klappt
  (also im entarteten Fall $\lambda_2 = 3\lambda_1$),
  dann auch mit *keiner* (!) anderen:
  dann ist der Summand mit x_1^3 prinzipiell unauslöschbar.
- Beweis: Satz vom Poincaré aus seiner Dissertation.

- *Poincaré*:
  Sind die Eigenwerte der Jacobi-Matrix am Gleichgewicht nicht-resonant,
  dann kann Dynamik in der Nähe von diesem Gleichgewicht
  durch eine fast id. Transformation auf lineare Gleichungen reduziert werden.

- Es geht sukzessiv:
  zuerst wird eine Transformation gesucht, die alle Summanden 2.Ordnung eliminiert (und dabei *möglicherweise* die höheren Ordnungen umformt),

  dann eine weitere Transformation, die die 3.Ordnung komplett eliminiert
  (und dabei die 2.Ordnung nicht wieder erzeugt),
  dann kommt die 4.Ordnung an die Reihe, und so weiter.

- In Abwesenheit von resonanten Eigenwerten klappt dieses Verfahren immer.

- Es entscheiden also lediglich die Eigenwerte der Jacobi-Matrix,
  und damit nur die linearen Summanden der Differentialgleichung
  über Erfolg oder Mißerfolg;
  die Struktur der (zu vernichtenden) Nichtlinearität spielt dabei keine Rolle!

- Es bleibt nur die Frage: Wann sind die Eigenwerte resonant?

Die Jacobi-Matrix hat N (reelle und/oder komplex-konjugierte) Eigenwerte:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$$

Falls $\exists$ so ein i und so ein Satz von ganzzahligen nicht-negativen m_j, dass

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{N} m_j \lambda_j$$

(Ein Eigenwert gleich Superposition aller Eigenwerten mit ganzzahligen nicht-negativen Koeffizienten)

dann ist die Jacobi-Matrix resonant .

Die *(ganze)* Zahl $k = \sum_{j=1}^{N} m_j$ mit $k \geq 2$ heißt Ordnung der Resonanz.

(der Fall $k = 1$, mit trivialem $m_j = \delta_{ij}$, ist immer vorhanden und zählt nicht zu den Resonanzen.)

- *Poincaré*: Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist, dann sind in der Gleichung Summanden der k.Ordnung mit keiner Transformation zu eliminieren.

Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist,
dann sind in der Gleichung alle Summanden der k.Ordnung
mit keiner Transformation zu eliminieren.

Beispiel: das System $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a x_1^n \end{cases}$ kann bei allen $\lambda_2 \neq n\lambda_1$ auf ein lineares transformiert werden

- Bei der Entartung $\lambda_2 = n\lambda_1$ $\Rightarrow$ Resonanzordnung $k = n$
  $\Rightarrow$ sind Summanden n.Ordnung nicht eliminierbar.

Falls die Jacobi-Matrix eine Resonanz der Ordnung k aufweist,
dann sind in der Gleichung alle Summanden der k.Ordnung
mit keiner Transformation zu eliminieren.

Was bedeutet das für nicht-hyperbolische Gleichgewichte?

1. Ein reeller Eigenwert verschwindet.

   Spektrum der Eigenwerte: $\lambda_1=0,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

   Dann gilt $\forall j \in \{1, N\}$ und eine beliebige ganze Zahl m: $\lambda_j = \underbrace{m\lambda_1}_{0} + \lambda_j$.

   Resonanzordnung k $(k = m + 1)$ für alle $k \geq 2$

   $\Rightarrow$ nichtlineare Summanden aller Ordnungen können nicht eliminiert werden.

2. Reeller Teil verschwindet bei zwei komplexen Eigenwerten.

   Spektrum der Eigenwerte: $\lambda_1=\mathrm{i}\omega,\ \lambda_2 = -\mathrm{i}\omega,\ \lambda_3, \ldots, \lambda_\mathrm{N}$.

   Dann gilt $\forall j \in \{1, N\}$ und eine beliebige ganze Zahl m: $\lambda_j = \underbrace{m\lambda_1 + m\lambda_2}_{0} + \lambda_j$.

   Resonanzordnung $2m + 1$ $\Rightarrow$ Nichtlinearitäten aller ungeraden Ordnungen können nicht eliminiert werden.

Trost: alle Summanden mit geraden Potenzen können wegtransformiert werden.

In typischen (*generischen*) parameterabhängigen dynamischen Systemen verschwindet bei Stabilitätsverlust eines Gleichgewichts reeller Teil von einem oder von zwei Eigenwerten der Jacobi-Matrix.

Dimensionsreduktion (auf die Zentrumsmannigfaltigkeit) und Komplexitätsreduktion (zur Normalform) reduzieren dabei die ganze Vielfalt auf **folgende zwei Fälle**:

- Ein reeller Eigenwert $\lambda = 0$:
  a) eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit,
  b) Normalform enthält Nichtlinearitäten aller Ordnungen
  (die niedrigste anwesende dominiert und ist entscheidend).
- Zwei komplex-konjugierte Eigenwerte mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$:
  a) zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit,
  b) Normalform enthält nur die Nichtlinearitäten ungerader Ordnungen
  (schon die dritte Ordnung reicht meist).