

Vorlesung 8.

Bifurkationen III: Bifurkationen von Gleichgewichten





Lineare Stabilität

▷ $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N$. Gleichgewicht \mathbf{x}_* : $f_i(\mathbf{x}_*) = 0 \forall i$.

▷ Evolution kleiner Abweichungen $\xi_j \equiv x_j - x_{*j}$:

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1, N}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j + O(\|\xi\|^2), \text{ oder } \dot{\xi} = J \xi + O(\|\xi\|^2),$$

mit J - Jacobi-Matrix des Systems, am Punkt \mathbf{x}_* berechnet.

▷ Linearisierung:
$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1, N}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j$$

– lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Allgemeine Lösung: $\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_N e^{\lambda_N t}$;

λ_j ($j = 1, \dots, N$): Eigenwerte der Matrix J .

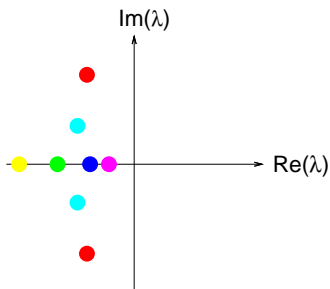
Für komplexe Eigenwerte $\lambda = \rho + i\omega$: $e^{\lambda t} = e^{\rho t} e^{i\omega t}$.

▷ Ausreichende Bedingung von Instabilität: $\exists j : \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$.

Für die Stabilität des Gleichgewichts ist es notwendig, dass

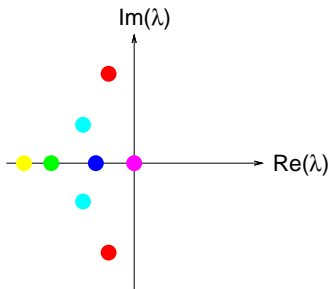
$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \forall j$$

Eigenwertspektrum von Jacobi-Matrix



- ▷ Sei die rechte Seite des Systems eine stetige Funktion von einem **Kontrollparameter** μ .
- ▷ Dann sind auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von μ abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ .

Eigenwertspektrum von Jacobi-Matrix



- ▷ Sei die rechte Seite des Systems eine stetige Funktion von einem **Kontrollparameter** μ .
- ▷ Dann sind auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von μ abhängig, und ändern sich stetig zusammen mit μ .
- ▷ Variation des Kontrollparameters kann **Stabilitätsverlust** verursachen.



- ▷ ein Gleichgewicht heißt **hyperbolisch**, falls \forall Eigenwerte λ_j seiner Jacobi-Matrix gilt: $Re(\lambda_j) \neq 0$.
- ▷ Am **kritischen** Parameterwert:
Gleichgewicht verliert Hyperbolizität, und dynamisches System wird **strukturell instabil**: eine beliebig kleine Variation des Parameters verändert Phasenportrait qualitativ.
- ▷ Das ist eine **Bifurkation**:
qualitativer Übergang in der **Struktur** des Phasenraums.

Bei der Bifurkation wird die lineare Analyse unzureichend:

Amplitude der **kritischen** Störungsmode mit $Re(\lambda)=0$
weder wächst noch schrumpft;
ihr Schicksal wird durch die Art der Nichtlinearität entschieden.
(Vgl. $\dot{x} = x^3$ und $\dot{x} = -x^3$.)



Auf den ersten Blick können in jedem dynamischen System die Bifurkationen anders aussehen.

Allgemeine Fragen:

1. Welche Rolle spielt Dimension des Phasenraums?

Gibt es z.B. Unterschiede bei den Bifurkationen in den Systemen 2., 22. und 222. Ordnung?

2. Wie werden die nichtlineare Effekten berücksichtigt?

Kann man die Taylor-Reihe „beschneiden“ und falls ja, wo?



Es stellt sich heraus, dass es wenige Varianten gibt.

Allgemeine Antworten:

1. Dimension \Rightarrow **Satz über die Zentrumsmannigfaltigkeit.**
Für die vollständige Analyse einer Bifurkation reicht es, einen invarianten Unterraum (*Zentrumsmannigfaltigkeit*) zu betrachten, mit der Dimension gleich der Anzahl von Eigenwerten der Jacobi-Matrix mit $\text{Re}(\lambda) = 0$.
 - ▷ Es bleiben also nur zwei Fälle:
A) **eindimensional**: $\lambda=0$ und B) **zweidimensional**: $\lambda = \pm i\omega$.
2. **Poincaré Normalformen**:
es gibt (nichtlineare) Transformationen der Koordinaten, bei welchen die meisten nichtlinearen Summanden der Taylorreihe identisch verschwinden.
 - ▷ Das, was von der Taylorreihe übrig bleibt, heißt **Normalform**.
Sie muss schließlich analysiert werden.
Graphische Darstellung: **Bifurkationsdiagramm**
(*Lage und Stabilität der Gleichgewichte als Funktion des Parameters*).



A. Reeller Eigenwert 0.

Allgemeine Normalform: $dx/dt = f(x, \mu)$.Gleichgewicht x_0 : $f(x_0, \mu) = 0$;dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$ Verschiebung: $x \rightarrow x - x_0$ Bifurkationsbedingung: $f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$.*(Gleichgewicht in $x=0$ und Bifurkation bei $\mu = 0$)*Taylor: $dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \dots$

$$\approx (a_{00} + b_0\mu) + (a_{10} + b_1\mu)x + (a_{20} + b_2\mu)x^2 + (a_{30} + b_3\mu)x^3 + \dots$$

$$= b_0\mu + b_1\mu x + (a_{20} + b_2\mu)x^2 + (a_{30} + b_3\mu)x^3 + \dots$$

Bei $a_{20} \neq 0$ kann man b_2 und Summanden mit x^n ($n > 2$) vernachlässigen.

$$\Rightarrow dx/dt = b_0\mu + b_1\mu x + a_{20}x^2$$

$$\triangleright \text{Transform: } x = -\frac{y}{a_{20}} - \frac{b_1\mu}{2a_{20}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{\mu \left(\frac{b_1^2\mu}{4} - a_{20}b_0 \right)}_{\bar{\mu}} - y^2 = \bar{\mu} - y^2$$



A. Reeller Eigenwert 0.

Allgemeine Normalform: $dx/dt = f(x, \mu)$.

Gleichgewicht x_0 : $f(x_0, \mu) = 0$;

dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$.

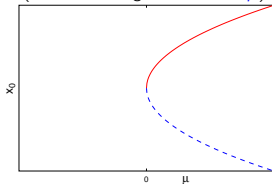
1. Normalform: $dx/dt = \mu - x^2$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = \sqrt{\mu}, & \lambda = -2\sqrt{\mu} \leq 0 \\ x_0 = -\sqrt{\mu}, & \lambda = 2\sqrt{\mu} \geq 0 \end{cases}$$

- ▷ Gleichgewichte existieren nur bei $\mu \geq 0$;
bei negativen μ gibt es sie (lokal!) nicht.
- ▷ Bei $\mu = 0$ entsteht/stirbt ein Paar von Gleichgewichten:
je ein **stabiles** und ein **instabiles**.
Bei $\mu < 0$ gibt es im System keine lokale Attraktoren!
- ▷ Das ist eine „**Sattel-Knoten**“ Bifurkation
(**saddle-node**).

Sie wird auch manchmal **fold bifurcation** (**Falte**) genannt.

Bifurkationsdiagramm
(Nullstellenmenge als Fkn. von μ)

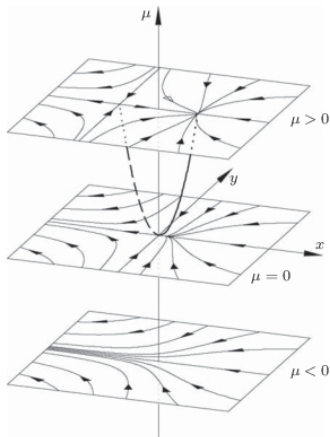




A. Reeller Eigenwert 0.

- ▷ Das ist eine „Sattel-Knoten“ Bifurkation (saddle-node).

Der Name entstammt allerdings dem Bild von einem 2-dimensionalen Phasenraum:





A. Reeller Eigenwert 0.

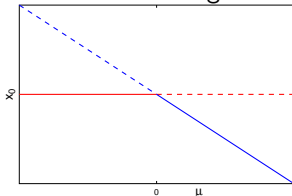
2. In manchen Anwendungen gibt es Gleichgewichte, die bei keinen Parameterwerten verschwinden dürfen (Beispiel: leere Population in der Populationsdynamik besteht immer).

$$\Rightarrow a_0(\mu) \equiv 0 \forall \mu \Rightarrow dx/dt = a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + \dots$$

$$\text{Normalform: } dx/dt = \mu x + x^2.$$

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\mu, & \lambda = -\mu \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm



- ▷ Beide Gleichgewichte existieren bei allen Werten von μ .
- ▷ Bei $\mu=0$ „passieren“ sie durcheinander und tauschen dabei ihre Stabilität.
- ▷ Das ist eine „transkritische“ Bifurkation der Gleichgewichte. (transcritical)

A. **Reeller Eigenwert 0.**

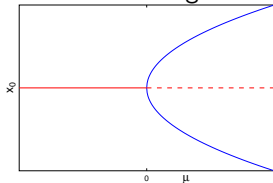
3. Anwendungen besitzen oft eine Spiegelsymmetrie $x \leftrightarrow -x$
 \Rightarrow eine Normalform $dx/dt = f(x, \mu)$ darf in solchen Fällen
keine gerade Potenzen von x enthalten.

Normalform: $dx/dt = \mu x \pm x^3$.

- 3a Wir betrachten getrennt: $dx/dt = \mu x - x^3$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\sqrt{\mu}, & \lambda = -2\mu \leq 0 \\ x_0 = \sqrt{\mu}, & \lambda = -2\mu \leq 0 \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm



- ▷ Gleichgewicht in Null existiert bei allen Werten von Kontrollparameter μ ;
es wechselt seine Stabilität beim Übergang über $\mu=0$.
Die beiden symmetrischen „Seiten“-Gleichgewichte existieren *nur* bei $\mu \geq 0$;
sie sind **stabil** im ganzen Parameterbereich deren Existenz.
- ▷ Das ist eine „**superkritische Heugabel**“-Bifurkation von Gleichgewichten
(**supercritical pitchfork**).

A. **Reeller Eigenwert 0.**

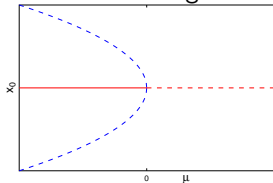
3. Anwendungen besitzen oft eine Spiegelsymmetrie $x \leftrightarrow -x$
 \Rightarrow eine Normalform $dx/dt = f(x, \mu)$ darf in solchen Fällen
keine gerade Potenzen von x enthalten.

Normalform: $dx/dt = \mu x \pm x^3$.

- 3b Wir betrachten getrennt: $dx/dt = \mu x + x^3$.

$$\text{Gleichgewichte: } \begin{cases} x_0 = 0, & \lambda = \mu \\ x_0 = -\sqrt{-\mu}, & \lambda = -2\mu \geq 0 \\ x_0 = \sqrt{-\mu}, & \lambda = -2\mu \geq 0 \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm



- ▷ Gleichgewicht im Null existiert bei allen Werten von Kontrollparameter μ ;
es wechselt seine Stabilität beim Übergang über $\mu=0$.
Die beiden symmetrischen „Seiten“-Gleichgewichte existieren *nur* bei $\mu \leq 0$;
sie sind **instabil** im ganzen Parameterbereich deren Existenz.
- ▷ Das ist eine „**subkritische Heugabel**“-Bifurkation von Gleichgewichten
(**subcritical pitchfork**).