Vorlesung 9

Bifurkationen IV:

Bifurkationen von Gleichgewichten.
Imperfekte Bifurkationen.
Andronov-Hopf Bifurkation.

A. Jacobi-Matrix: Reeller Eigenwert 0 (Wiederholung)

Eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit: $dx/dt = f(x, \mu)$.

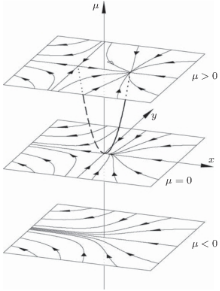
Gleichgewicht x_0: $f(x_0, \mu) = 0$;
dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f/\partial x|_{x=x_0}$.

Bifurkationsbedingung: $f(0,0) = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0.$

(Bifurkation bei $\mu = 0$ und Gleichgewicht in x=0)

Taylor: $dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \ldots$

▷ $a_0 \neq 0$ (mit $a_2 \neq 0$) $\Rightarrow$ Sattel-Knoten-Bifurkation (auch Falte, fold)



A. Jacobi-Matrix: Reeller Eigenwert 0

Eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit: $dx/dt = f(x, \mu)$.

Gleichgewicht x_0: $f(x_0, \mu) = 0$;
dessen Stabilität: Vorzeichen von $\lambda = \partial f/\partial x|_{x=x_0}$.

Bifurkationsbedingung: $f(0,0) = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0.$

(Bifurkation bei $\mu = 0$ und Gleichgewicht in $x{=}0$)

Taylor: $dx/dt = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \ldots$

- $a_0 \neq 0$ (mit $a_2 \neq 0$) $\Rightarrow$ Sattel-Knoten-Bifurkation (auch Falte, fold)
- $a_0 = 0$ (mit $a_2 \neq 0$) $\Rightarrow$ Transkritische Bifurkation
- $a_0 = 0$ und $a_2 = 0$ $\Rightarrow$ Heugabel-Bifurkation

- Im allgemeinen Fall ist die Taylor-Reihe vollständig: Abwesenheit von bestimmten Summanden weist auf eine Entartung hin.

  Streng genommen *(mikroskopisch)* ist eine räumliche Symmetrie nie perfekt.

  Aufhebung *(unfolding)* der Entartung: $a_{0,1,2} \to \varepsilon$.

Aufhebung von Entartungen in Normalformen

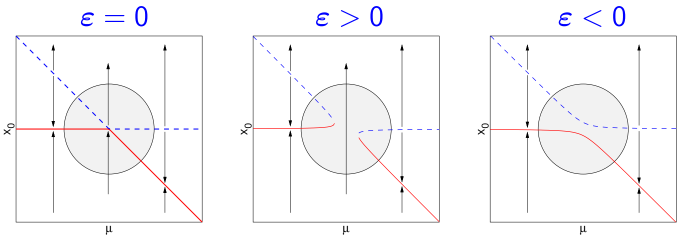
Lokalitätsprinzip: bei $|\mu| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon{=}0$.

Transkritische Bifurkation: $dx/dt = f(x) = \varepsilon + \mu x + x^2$.

$$x_0 = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\varepsilon}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \pm\sqrt{\mu^2 - 4\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$: Zwei Sattel-Knoten-Bifurkationen bei $\mu = \pm 2\sqrt{\varepsilon}$;
keine Gleichgewichte dazwischen

$\varepsilon < 0$: keine (!) Bifurkationen (da μ^2-4ε immer positiv)



Aufhebung von Entartungen in Normalformen.

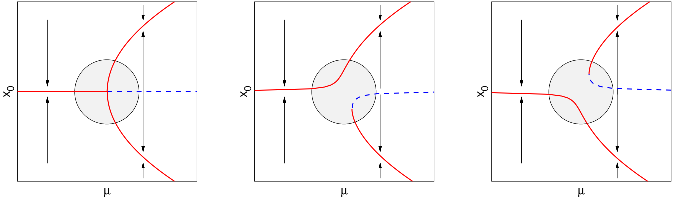
Lokalitätsprinzip: bei $|\boldsymbol{\mu}| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon = 0$.

Heugabel-Bifurkation: $dx/dt = f(x) = \varepsilon + \mu\, x - x^3$

Graphische Lösung fürs Bifurkationsdiagramm: $\boldsymbol{\mu} = x_0^2 - \dfrac{\varepsilon}{x_0}$

Einzige Sattel-Knoten-Bifurkation bei $\boldsymbol{\mu} = 3\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{2/3}$

$\varepsilon = 0$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$ $\qquad$ $\varepsilon < 0$



Hauptzweig merkt überhaupt nichts von der Bifurkation

Aufhebung von Entartungen in Normalformen.

Lokalitätsprinzip: bei $|\boldsymbol{\mu}| \gg |\varepsilon|$ keine qualitativen Unterschiede zu $\varepsilon=0$.

Was macht ein winziger quadratischer Summand
aus einer Heugabel-Bifurkation?
$dx/dt = f(x) = +\mu\, x + \varepsilon x^2 - x^3$

(Hausaufgabe)

B. Jacobi-Matrix: Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, \mathrm{i}\,\omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional.

$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx/dt &= L_x(x,y) + N_{2x}(x,y) + N_{3x}(x,y) + N_{4x}(x,y) + \dots \\ dy/dt &= L_y(x,y) + N_{2y}(x,y) + N_{3y}(x,y) + N_{4y}(x,y) + \dots \end{aligned}$$

mit den linearen L_x, L_y und den Formen j-er Ordnung N_{jx}, N_{jy}.

- Wir ordnen *Eigenwerte der Jacobi-Matrix*: $\lambda_1 = \mathrm{i}\,\omega$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}\,\omega$, $\lambda_3, \dots, \lambda_N$.
  Dann für $2 < j < N$ und ein beliebiges ganzes K gilt:

  $$\lambda_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \lambda_i, \text{ mit } m_1 = m_2 = K \text{ und } m_i = \delta_{ij}\ \forall\, i > 2.$$

- Damit ist $\sum_{i=1}^{N} m_i = 2K + 1$: Resonanz der Ordnung $2K+1$.
- Folge *(Poincaré)*: Summanden mit ungeraden (Summen von den) Potenzen von x und y lassen sich aus den Gleichungen nicht wegtransformieren.
- Aber alle Summanden mit geraden Summen von den Potenzen (angefangen von 2) können sukzessiv eliminiert werden.

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, \mathrm{i}\, \omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional
$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen.

- Normalform reduziert sich auf:

$$dx/dt = \mu\, x - \omega\, y \mp x\,(x^2 + y^2)$$
$$dy/dt = \omega\, x + \mu\, y \mp y\,(x^2 + y^2)$$

(Summanden 2.Ordnung und teilweise 3.Ordnung werden durch Koordinatentransformation eliminiert).

Bemerkenswert: Normalform besitzt die *Rotationssymmetrie*

(obwohl die ursprünglichen Gleichungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit sie nicht unbedingt hatten).

- Jacobian des Gleichgewichts im Ursprung: $\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\,\omega$.

Gleichgewicht: ein Strudel, stabil bei $\mu < 0$ und instabil bei $\mu > 0$.

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, \mathrm{i}\, \omega$

Zentrumsmannigfaltigkeit ist zweidimensional
$\Rightarrow$ Es kommt zu einem System aus zwei Gleichungen.

▷ Normalform reduziert sich auf:

$$dx/dt \;=\; \mu\, x - \omega\, y \;\mp x\, (x^2 + y^2)$$
$$dy/dt \;=\; \omega\, x + \mu\, y \;\mp y\, (x^2 + y^2)$$

(Summanden 2.Ordnung und teilweise 3.Ordnung werden durch Koordinatentransformation eliminiert).

Bemerkenswert: Normalform besitzt die *Rotationssymmetrie*
(obwohl die ursprünglichen Gleichungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit sie nicht unbedingt hatten).

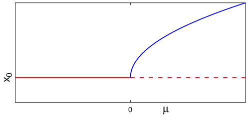
▷ Übergang zu Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi \quad (r \geq 0)$.
Dann $dr/dt = (\dot{x}x + \dot{y}y)/r$, und $d\varphi/dt = (\dot{y}x - \dot{x}y)/r^2$, also

$$\dot{r} = \mu r \mp r^3$$
$$\dot{\varphi} = \omega$$

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\, \mathrm{i}\, \omega$

$$\dot{r} = \mu r \mp r^3$$
$$\dot{\varphi} = \omega$$

- Koordinaten sind „abgekoppelt“:
  aus dem System werden zwei getrennte Gleichungen.
- Gleichung für φ ergibt explizit: $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$
  – eine Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω
- Gleichung für r: Normalform der Heugabel
  (ohne dem negativen Ast)
  Gleichgewichte: $r_0 = 0$ und $r_0 = \sqrt{\pm\mu}$



- Konstanter Wert von r, gleichmäßige Drehung entlang φ
  – periodische Bewegung entlang einer runden Phasenbahn.

Im Fall von $-r^3$ in der 1.Gleichung wird diese Bahn asymptotisch stabil
$\Rightarrow$ Grenzzyklus (limit cycle)

B. Ein Paar rein imaginärer Eigenwerten $\pm$ i ω

Somit führt diese Art von Stabilitätsverlust bei einem Gleichgewicht zum Einsetzen von einer qualitativ anderen Form von Dynamik:

- aus dem Gleichgewicht entstehen periodische Schwingungen,
  die Amplitude wächst als $\sim \sqrt{\mu}$,
  und die Periode ist annähernd $2\pi/\omega$.

- Dieser Übergang heißt Andronov-Hopf Bifurkation:
  A.A. Andronov hat sie für zweidimensionale Systeme beschrieben (1929),
  E.Hopf behandelte den allgemeinen Fall für ein System mit Ordnung n (1942).

- Abhängig vom Vorzeichen vor r^3, kann diese Bifurkation

  „weich“/superkritisch (stabile Schwingungen)

  oder „hart“/subkritisch (instabile Schwingungen) sein.

- Seien x, y Koordinaten auf der Zentrumsmannigfaltigkeit des Gleichgewichts:

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \dot{y} = g(x, y, \mu), \quad f(0, 0, \mu) = g(0, 0, \mu) = 0,$$

und es $\exists$ ein reelles ω, so dass bei $\mu{=}0$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x=y=0} \quad \text{die Form} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat.}$$

Sei, außerdem, $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \neq 0$ *(Bifurkationsbedingung)*.

- Dann zweigt sich bei $\mu{=}0$ eine periodische Lösung vom Gleichgewicht ab.

Ist

$$Q = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$$

negativ, dann ist die periodische Lösung stabil (superkritische Bifurkation).

Ist Q positiv, dann ist diese Lösung instabil (subkritische Bifurkation).

Henri Poincaré

1882

Alexandr Andronov

1929

Eberhard Hopf

1942

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle;

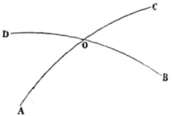
PAR M. H. POINCARÉ (1),
Ingénieur des Mines.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Convention fondamentale. — Considérons une *demi-caractéristique* quelconque; nous la prolongerons indéfiniment, si on peut le faire sans rencontrer un point singulier; si, au contraire, en suivant la demi-caractéristique, nous arrivons à un nœud, nous l'arrêterons à un nœud; si nous arrivons à un col, trois chemins s'ouvriront devant

Fig. 6.



nous quand nous voudrons continuer à suivre la caractéristique, le

(1) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VII, p. 375.

soit n, M_n est toujours sur l'arc AB, M_n tendra vers une limite quand n augmentera indéfiniment. Soit H cette limite.

Le conséquent de M_n, quand n est infiniment grand, est infiniment rapproché de M_n. Donc H est son propre conséquent; donc la caractéristique qui passe par H est un cycle; nous l'appellerons *cycle limite* de la demi-caractéristique donnée. On peut suivre sur la caractéristique qui passe par M_0 un arc assez grand pour se rapprocher autant que l'on veut du point H.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES CYCLES SANS CONTACT.

La facilité avec laquelle se discutent complètement les exemples précédents est due à deux causes. En premier lieu, les cycles limites étant algébriques, le système topographique des cycles sans contact et des cycles limites est lui-même algébrique; en second lieu, la forme même de l'équation différentielle permet de trouver immédiatement ce système topographique; mais il est évident que cela n'aura pas lieu en général.

Quand les cycles limites ne sont pas algébriques, une discussion complète est évidemment impossible; car on ne pourra jamais trouver en termes finis l'équation des cycles limites. Mais on peut arriver à

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues.* Note de M. **A. Andronow**, présentée par M. Hadamard.

1. Les oscillations dites *auto-entretenues* suscitent depuis quelques années un intérêt de plus en plus vif dans plusieurs domaines des sciences naturelles. Ces oscillations sont régies par des équations différentielles qui diffèrent de celles qu'étudient la physique mathématique et la mécanique classique. Les systèmes où se produisent ces phénomènes ne sont pas conservatifs et entretiennent leurs oscillations en puisant l'énergie à des sources non périodiques.

Citons, pour le cas des équations aux dérivées partielles, le problème déjà ancien de la corde vibrante excitée par un archet ainsi que le problème des Céphéides, tel que le traite Eddington [1]; pour celui des équations différentielles ordinaires, en mécanique le pendule de Froude [2], en physique l'oscillateur à triode [3], en chimie les réactions périodiques [4]; des problèmes similaires se posent en biologie [5].

2. Considérons le cas le plus simple des auto-oscillations que présente — en mécanique et en physique — un système à un degré de liberté, en chimie une réaction entre deux substances, en biologie deux espèces animales coexistantes. Ces systèmes peuvent être représentés par deux équations différentielles simultanées :

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx}{dt} = P(x, y); \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

On sait que les solutions stationnaires d'un tel système peuvent être de deux espèces : soit constantes, soit périodiques en t. Exigeons, en nous basant sur l'étude des phénomènes de ce genre effectivement observés, que les mouvements périodiques que nous considérons soient stables, par rap-

---

(1) Eddington, *The internal constitution of stars*, p. 200 (Cambridge, 1926).
(2) Lord Rayleigh, *The theory of sound*, London, I, 1894, p. 212.
(3) Voir par exemple van der Pol, *Phil. Mag.*, 7e série, 2, 1926, p. 978.
(4) Voir par exemple Kremann, *Die periodischen Erscheinungen in der Chemie*, p. 124 (Stuttgart, 1913).
(5) Lotka, *Elements of physical biology*, p. 88 (Baltimore, 1925). Voir aussi les récentes recherches de M. Volterra.

A.A. Andronov, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **189** (14 octobre 1929), p. 559–561.

. . . On peut, facilement montrer qu'aux mouvements périodiques satisfaisant à ces conditions correspondent, sur le plan xy, des courbes fermées isolées, dont s'approchent en spirales, de l'intérieur et de l'extérieur (pour t croissant), les solutions voisines. Il en résulte que *les auto-oscillations qui naissent dans les systèmes caractérisés par des equations du type (A) correspondent mathematiquement aux cycles limites stables de Poincaré*. Il est donc clair que la période et l'amplitude des oscillations stationnaires ne dépendent pas des conditions initiales.

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER
SÄCHSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
XCIV. BAND
SITZUNG VOM 19. JANUAR 1942

Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems.

1. Einleitung.

Es sei

$$\dot{x}_i = F_i\,(x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oder in Vektorschreibweise

(1. 1) $$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{F}\,(\mathfrak{x}, \mu)$$

ein reelles Differentialsystem mit reellem Parameter μ. $\mathfrak{F}$ sei analytisch in $\mathfrak{x}$ und μ, wenn $\mathfrak{x}$ in einem Gebiete G liegt und $|\mu| < c$ ist. (1. 1) soll eine für $|\mu| < c$ analytische Schar stationärer Lösungen $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}\,(\mu)$ in G besitzen,

$$\mathfrak{F}\,(\bar{\mathfrak{x}}\,(\mu), \mu) = 0 .$$

Die charakteristischen Exponenten der stationären Lösung sind bekanntlich die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe

$$\lambda\,\mathfrak{a} = \mathfrak{L}_\mu\,(\mathfrak{a}),$$

wo $\mathfrak{L}_\mu$ den nur von μ abhängigen linearen Operator bedeutet, welcher durch Weglassen der nicht linearen Glieder in der Reihenentwicklung von $\mathfrak{F}$ um $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ entsteht. Die Exponenten sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex und hängen von μ ab.

Satz. Für $\mu = 0$ seien genau zwei charakteristische Exponenten rein imaginär. Ihre stetigen Fortsetzungen $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$ mögen den Bedingungen

$$\alpha(0) = -\bar{\alpha}(0) \neq 0, \qquad \Re\left(\alpha'(0)\right) \neq 0 \tag{1.2}$$

genügen. Dann existiert eine Schar reeller periodischer Lösungen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften $\mu(0) = 0$ und $\mathfrak{x}(t, 0) = \bar{\mathfrak{x}}(0)$, aber $\mathfrak{x}(t, \varepsilon) \neq \bar{\mathfrak{x}}(\mu(\varepsilon))$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \neq 0$. $\mu(\varepsilon)$ und $\mathfrak{x}(t, \varepsilon)$ sind an der Stelle $\varepsilon = 0$ bzw. an jeder Stelle $(t, 0)$ analytisch. Dasselbe gilt von der Periode $T(\varepsilon)$, und es ist

$$T(0) = \frac{2\pi}{|\alpha(0)|}.$$

Zu beliebig großem L gibt es zwei positive Zahlen a und b derart, daß für $|\mu| < b$ außer der stationären Lösung und den Lösungen der Scharhälfte $\varepsilon > 0$ keine periodischen Lösungen existieren, deren Periode kleiner als L ist, und die ganz in $|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}(\mu)| < a$ liegen.[1]) Die periodischen Lösungen existieren bei hinreichend kleinem μ entweder nur für $\mu > 0$ oder nur für $\mu < 0$ (Allgemeiner Fall), oder aber nur für $\mu = 0$.

Obwohl mir die Behandlung der Abzweigungsaufgabe auf Grund der Voraussetzung (1.2) in der Literatur nicht begegnet ist, glaube ich kaum, dass an dem obigen Satz etwas wesentlich Neues ist.

Die Methoden sind vom Poincaré vor etwa 50 Jahren entwickelt worden und gehören heute zum klassischen Gedankengut der Theorie der periodischen Lösungen im Kleinen.

Da aber der Satz von Interesse in der nichtkonservativen Mechanik ist, schien mir eine ausführliche Darstellung nicht unnütz zu sein.