

Vorlesung 13

# Einführung in die fraktale Geometrie





Menü

TAGESSPIEGEL

ABO

Lang lebe der Lido: Die kuriose Streckung der italienischen Küste



## Lang lebe der Lido Die kuriose Streckung der italienischen Küste

Jahrzehntlang dachte man, Italiens Küste erstrecke sich über 8000 Kilometer. Jetzt sollen es auf einmal mehr als 11.000 sein. Die wundersame Streckung der Strände hat einen politischen Grund.

Von Dominik Straub  
25.11.2023, 13:03 Uhr

Die italienische Universal-Enzyklopädie Treccani gibt die Länge der Küstenlinie schon seit jeher mit „etwa 8000 Kilometer“ an. Darin eingeschlossen sind die Küsten der großen Inseln Sardinien und Sizilien und auch aller anderen, kleineren Inseln. Dass die Enzyklopädie keine genaue Zahl nennt, liegt daran, dass es letztlich unmöglich ist, die zerklüftete Küste hundertprozentig genau zu vermessen.

Doch genau dieses Kunststück ist nun den Mitgliedern des „technischen Gremiums“ gelungen, das die Rechtsregierung von Giorgia Meloni in der Frage der Strandbad-Konzessionen berät. Laut der Arbeitsgruppe beträgt die Länge der Küste nicht ungefähr 8000 Kilometer, sondern exakt 11.775 Kilometer und 794 Meter.





**Wikipedia:** *Die Dimension ist ein Konzept in der Mathematik, das im Wesentlichen die Anzahl der Freiheitsgrade einer Bewegung in einem bestimmten Raum bezeichnet.*

**Naive Frage:** warum sagen wir, dass eine Linie **eindimensional**, eine Fläche **zweidimensional** und ein (eingeschlossenes) Volumen **dreidimensional** sind ?

**Naive Antwort:** weil man die instantane Lage des Punktes auf einer Linie durch **eine** reelle Zahl, auf einer Fläche durch **zwei** reelle Zahlen und in einem Volumen durch **drei** reelle Zahlen eindeutig bestimmt.

**Konsequenz:** Da die *Anzahl der Freiheitsgrade* (oder die Anzahl reeller Zahlen in einem Satz) eine **ganze** Zahl ist, wird dadurch auch die Dimension zwangsweise **ganzzahlig**.



Kann man die Lage im Raum eindeutig auf **eine einzige** reelle Zahl reduzieren?

Wir betrachten einen Würfel mit Seitenlänge **1** im **3**-dimensionalen Raum, setzen eine deren Ecken in den Ursprung und richten die Kanten entlang der  $x, y, z$ -Achsen.

Ein Punkt im inneren des Würfels hat Koordinaten

$$0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1, \quad 0 \leq z < 1.$$

Dezimale Darstellung:  $x=0,x_1x_2x_3x_4\dots$ ,  $y=0,y_1y_2y_3y_4\dots$ ,  $z=0,z_1z_2z_3z_4\dots$ .

Wir bilden **eine** Zahl  $u$  mit dezimaler Darstellung  $u=0,u_1u_2u_3\dots$ ,  $0 \leq u_j \leq 9$

$$u=0,x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3x_4y_4z_4\dots,$$

$$\text{mit } u_{3k-2} = x_k, \quad u_{3k-1} = y_k, \quad u_{3k} = z_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Aus dem (einzigem!) Wert von  $u$  kann man durch seine dezimale Zerlegung alle drei ursprüngliche kartesische Koordinaten eindeutig wiederherstellen:

$$x=0,u_1u_4u_7\dots u_{3k-2}\dots,$$

$$y=0,u_2u_5u_8\dots u_{3k-1}\dots,$$

$$z=0,u_3u_6u_9\dots u_{3k-2}\dots$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Damit ist die Anfangsfrage positiv beantwortet, aber ist es wirklich **das**, was wir wollen?



# Wie lang ist die spanisch-portugiesische Grenze?

Google Maps

[http://maps.google.de/maps?f=q&source=s\\_q&hl=de&geocode=&q=&sa...](http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&sa...)





## Wie lang ist die spanisch-portugiesische Grenze?

- ▶ Laut der *alten* spanischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der spanisch-portugiesischen Grenze 987 Kilometer.
- ▶ Laut der *alten* portugiesischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der portugiesisch-spanischen Grenze 1214 Kilometer.

Fläche Spaniens:  $504\,645\text{km}^2$ ; Fläche Portugals  $92\,090\text{km}^2$ .  
 $92\,391\text{km}^2$ .



# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Google Maps

[http://maps.google.de/maps?f=q&source=s\\_q&hl=de&geocode=&q=&...](http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&...)





Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

- ▶ Laut der belgischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der belgisch-niederländischen Grenze 380 Kilometer.
- ▶ Laut der niederländischen Enzyklopädia, beträgt die Länge der belgisch-niederländische Grenze 449 Kilometer

Fläche Belgiens:  $30\,528\text{km}^2$ ;

Fläche von den Niederlanden:  $37\,354\text{km}^2$ .



# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Google Maps

[http://maps.google.de/maps?F=q&source=s\\_q&M=de&geocode=-&q=&s...](http://maps.google.de/maps?F=q&source=s_q&M=de&geocode=-&q=&s...)

Google





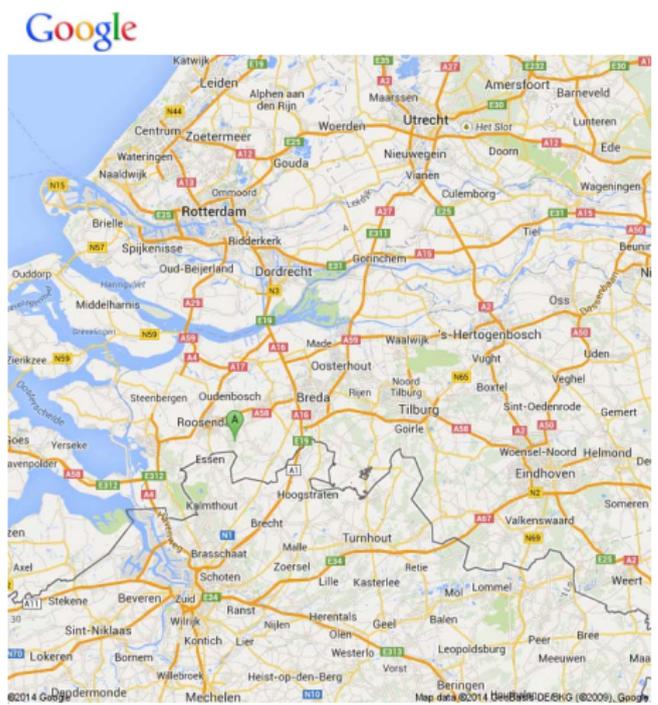
# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Nederheidsbaan - Google Maps

[https://maps.google.de/maps?F=d&source=...\\_d&saddr=51.489935,4.54...](https://maps.google.de/maps?F=d&source=..._d&saddr=51.489935,4.54...)



*Kurvimeter*

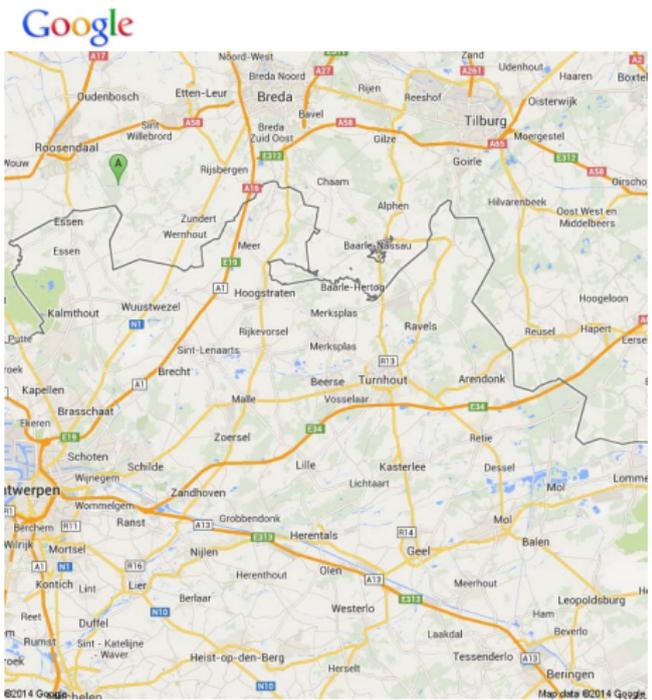




# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Nederheidsbaan - Google Maps

[https://maps.google.de/maps?f=d&source=s\\_d&saddr=-51.489935,4.54...](https://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=-51.489935,4.54...)

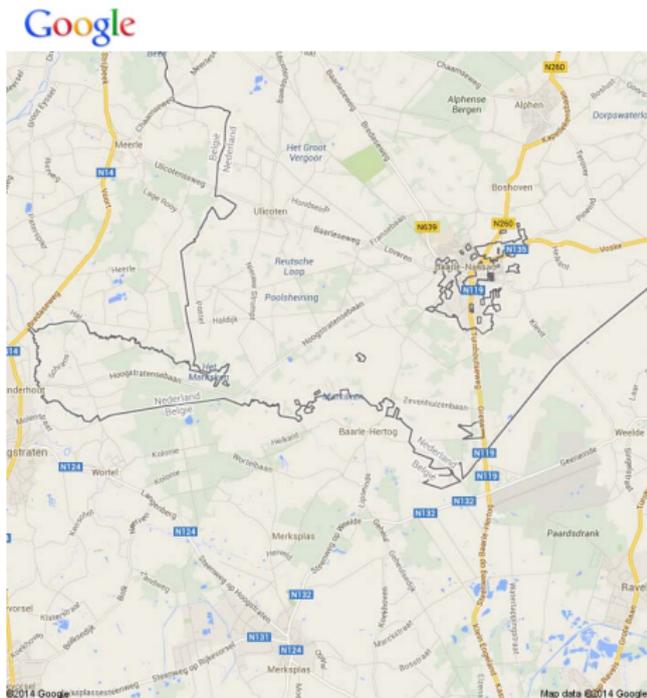




# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Nederheidsbaan - Google Maps

[https://maps.google.de/maps?f=d&source=s\\_d&saddr=-51.489935,4.54...](https://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=-51.489935,4.54...)





# Wie lang ist die belgisch-niederländische Grenze?

Nederheidebaan - Google Maps

[https://maps.google.de/maps?F=d&source=s\\_d&saddr=51.489935,4.54...](https://maps.google.de/maps?F=d&source=s_d&saddr=51.489935,4.54...)



(H)odometer



# Wie lang ist die britische Küste?

Google Maps

[http://maps.google.de/maps?f=q&source=s\\_q&hl=de&geocode=&q=&...](http://maps.google.de/maps?f=q&source=s_q&hl=de&geocode=&q=&...)





Kürzere Meßplatte  $\Rightarrow$  bessere Auflösung  
 $\Rightarrow$  mehr Buchten und Landzungen  $\Rightarrow$  längere Küstenlinie

Maßstab=200Km  
Länge=2400Km

Maßstab=100Km  
Länge=2800Km

Maßstab=50Km  
Länge=3400Km



## Wie berechnet man eine Dimension:

- ▷ Das Messobjekt wird von Kästchen (Quadraten, Quader,...) mit Kantenlänge  $\varepsilon$  vollständig überdeckt. Es werden  $N$  Kästchen benötigt.
- ▷ Kantenlänge  $\varepsilon$  wird verkleinert. Nun wird eine größere Anzahl von Kästchen gebraucht.
- ▷ Falls wir das Kästchen uneingeschränkt verkleinern, wird die Kästchenanzahl  $N(\varepsilon)$ , die für die vollständige Überdeckung nötig ist, uneingeschränkt wachsen. Die Frage: **wie schnell** ?

bei einer *Kurve* ist  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$ ; bei einer *Fläche* ist  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2} \dots$

- ▷ Der Grenzwert

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/\varepsilon)} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)}$$

... ist nicht zwangsweise eine **ganze** Zahl

und wird **fraktale Dimension** vom Objekt genannt  
(*box-counting dimension, Kapazitätsdimension*).



- ▷ Der Grenzwert

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/\epsilon)} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(\epsilon)}$$

wird **fraktale Dimension** vom Objekt genannt  
(*box-counting dimension*, *Kapazitätsdimension*).

- ▷ Ein Objekt mit **nicht**ganzzahligem  $D$  wird als **Fraktal** bezeichnet.

Bruchzahl ↔ fraction



Zurück zu den Küsten: wie groß wird  $D$  ?

Für unterschiedliche Küsten unterscheiden sich die Schätzwerte beträchtlich.

Großbritannien ergibt 1,3.

Für die sehr glatte südafrikanische Küste kommt praktisch 1 heraus.

Für die norwegische Küstenlinie (Fjorden!): 1,55.

*Zurück zum Anfang:* Wie steht es um Italien?



## Selbstähnlichkeit (self-similarity) .



Ein kleiner Teil vom Objekt ist (exakt oder annähernd) dem ganzen Objekt ähnlich.

Jede neue Vergrößerung gibt das ursprüngliche Objekt wieder.

Aber: oft nur bei der passenden Wahl vom Maßstab  
( Selbstähnlichkeitskoeffizient )

Exakte Ähnlichkeit: Skaleninvarianz (scale invariance).

Mathematisch kann dieser Prozess unendlich sein.

In der Natur stößt man auf die Grenzen  
(spätestens auf der atomaren Skala).



Felix Hausdorff



Abram Besicovitch



Fry Richardson



Benoit Mandelbrot



## Hausdorff (-Besicovitch) Dimension

1. Für gegebenes  $\varepsilon$  wird das Objekt  $X$  ~~von Kästchen mit Kantenlänge  $\varepsilon$  vollständig überdeckt.~~ mit **Kugeln** vom Radius  $r_i \leq \varepsilon$  vollständig überdeckt.
2. Für jedes reelles  $d$  wird  $S(\varepsilon, d) = \inf \sum_i r_i^d$  bestimmt  
(*inf wird über alle mögliche Überdeckungen berechnet*).
3. Für genügend **kleine**  $d$ :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, d) = \infty$ .
4. Für genügend **große**  $d$ :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, d) = 0$ .
5. Den Schnittwert (oder **inf** von „genügend großen“) nennt man  $D_H(X)$ : **Hausdorff-Dimension von  $X$** .
6.  $D_H \leq D$ .



## *Eine Fliege und ein Knäuel Wolle*

- ▷ Aus der großen Entfernung erscheint der Knäuel der Fliege als kleiner Punkt (topologische Dimension 0).
- ▷ Im Laufe vom Anflug wird dieser Punkt zum „großen Punkt“ – zum Disk (topologische Dimension 2).
- ▷ Aus der noch näheren Distanz empfindet die Fliege den Knäuel als eine Kugel (topologische Dimension 3).
- ▷ Aus der nächsten Nähe sieht die Fliege einen glatten Faden: eine auf besondere Weise gewickelte Raumstellen (topologische Dimension 1).
- ▷ Nach der Landung sieht die Fliege auch die Zotten/Flaum, empfindet damit die Fraktalität der Wolle.
- ▷ Wie groß ist dann die „echte“ Dimension vom Knäuel?  
Die gibt es **nicht**:  
alles wird vom Blickpunkt des Beobachters abhängig,  
von der Auflösungsfähigkeit seiner Augen oder des Meßgeräts.



## *Klassifizierung von Fraktalen*

1. Die konstruktiven (aufgebaut durch bestimmte rekursive Verfahren):
2. Die dynamischen (von dynamischen Systemen generiert):  
*Julia-Menge, Mandelbrot-Menge, chaotische Attraktoren, ...*
3. Die „natürlichen“ (aus der Natur ...)  
Hier wird Selbstähnlichkeitsintervall zwangsweise von unten begrenzt.  
*Küstenlinien, Wolken, turbulente Strömungen, Blutgefäße, ...*



## Konstruktive Fraktale

**Cantor-Menge** (Cantor-Staub): Georg Cantor, 1883.

Aus dem Intervall von Länge 1 wird das **mittlere Drittel** (ohne Endpunkte) rausgeworfen. Dieses Verfahren wird an jedes verbliebene Intervall angewendet, und so *ad infinitum*.



Im *limes* bleibt eine Menge, die

- ▶ einerseits, keine Intervalle einschließt und Gesamtlänge **0** besitzt;
- ▶ andererseits, ein Kontinuum von Zahlen beinhaltet.

*Tatsächlich: es werden nach und nach Zahlen entfernt, deren **ternäre***

*Darstellung  $x = 0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ , mit  $a_j = 0, 1, 2$  das Symbol **1** beinhaltet. Es bleiben Zahlen mit  $a_j =$  nur noch **0** oder **2**.*

*... aber **alle** solche Zahlen (stellen Sie sich Ersetzung **2**  $\rightarrow$  **1** vor)*

*bilden ein Kontinuum, äquivalent zum ursprünglichen Intervall **(0, 1)**.*

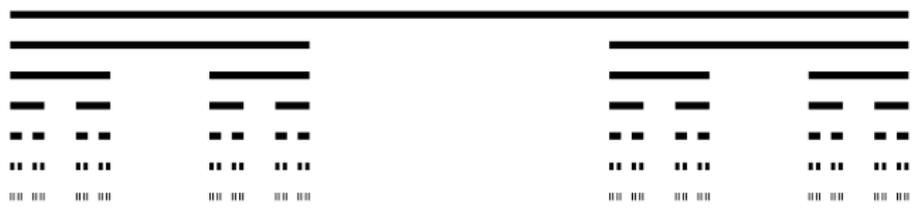


## Konstruktive Fraktale

**Cantor-Menge** (Cantor-Staub): Georg Cantor, 1883.

Aus dem Intervall von Länge 1 wird das **mittlere Drittel** (ohne Endpunkte) rausgeworfen.

Dieses Verfahren wird an jedes verbliebene Intervall angewendet...



Berechnung der Dimension:

Bei jedem Schritt wird  $\epsilon$  um Faktor 3 verkleinert:  $\epsilon_n = 3^{-n}$ .

Bei jedem Schritt wird die Kästchenanzahl verdoppelt:  $N = 2^n$ .

$$D = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\epsilon)} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots$$



## Konstruktive Fraktale

### Koch-Kurve

Aus einer Linie wird das mittlere Drittel entfernt und durch zwei gleiche Abschnitte ersetzt.

Und so weiter, *ad infinitum*.

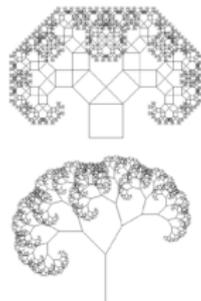
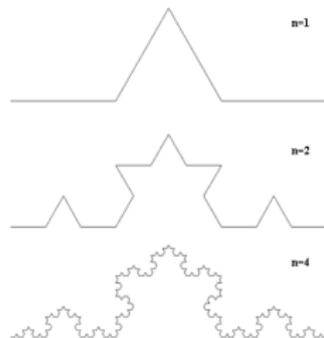
Es entsteht eine unendlich lange Linie, die sich selbst nicht schneidet, ist stetig aber in jedem ihrer Punkte nicht differenzierbar!

$$\text{Dimension: } D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\dots$$

### Pythagoras-Baum

Eine Seite eines Quadrates wird, als Hypotenuse, durch zwei Katheten ersetzt.

An jedem der Katheten wird ein neues Quadrat aufgebaut. Und so weiter, *ad infinitum*.

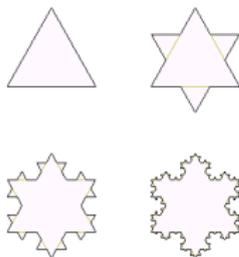




## Konstruktive Fraktale

Geschlossene Kochskurve wird zur **Schneeflocke**.

Im Laufe der Iterationen wächst die Grenzlänge uneingeschränkt, obwohl die eingeschlossene Fläche endlich bleibt.



Erste vier Iterationen.

Selbstähnlichkeitskoeffizient:  $1/3$



## Konstruktive Fraktale

### Sierpinski-Dreieck —

zweidimensionales Gegenstück zu der Cantormenge,  
von Vaclav Sierpinski in 1913 vorgeschlagen.



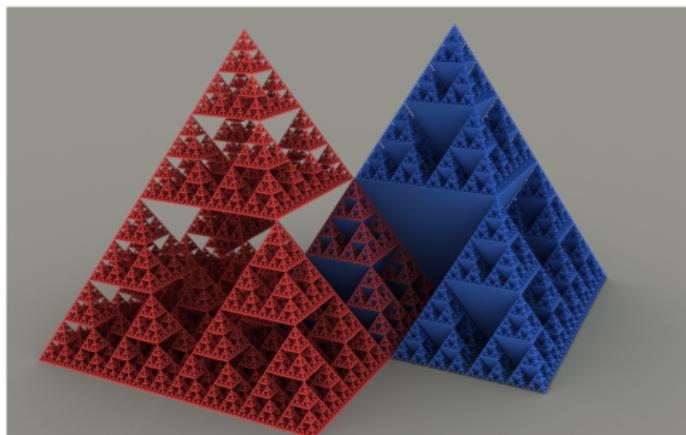
Erste vier Schritte.

Selbstähnlichkeitskoeffizient:  $1/3$



## *Konstruktive Fraktale*

Dreidimensionale Version vom Sierpinski-Dreieck:

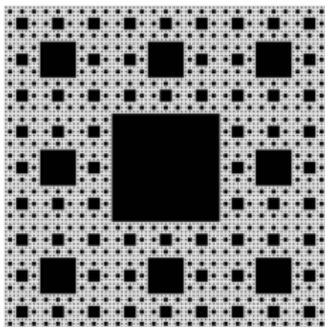


Selbstähnlichkeitskoeffizient:  $1/3$

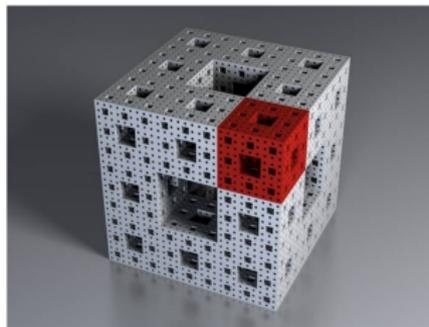


## Konstruktive Fraktale

Sierpinski-Teppich



(Menger)-Schwamm



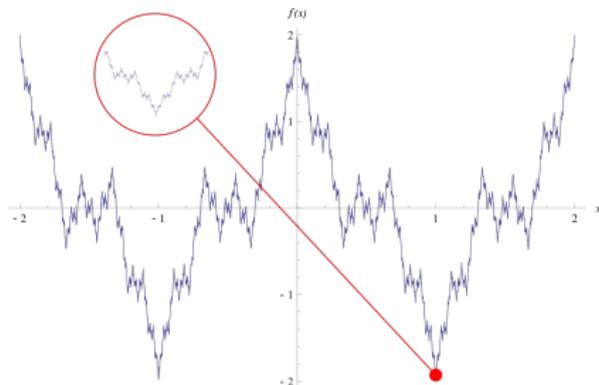
Selbstähnlichkeitskoeffizient:  $1/3$



## Weierstraß-Funktion

Karl Weierstraß (1872): 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

mit  $0 < a < 1$ ,  $b$  ganz und ungerade, und  $ab > 1 + 3\pi/2$ :



Überall stetig, **nirgendwo** differenzierbar!

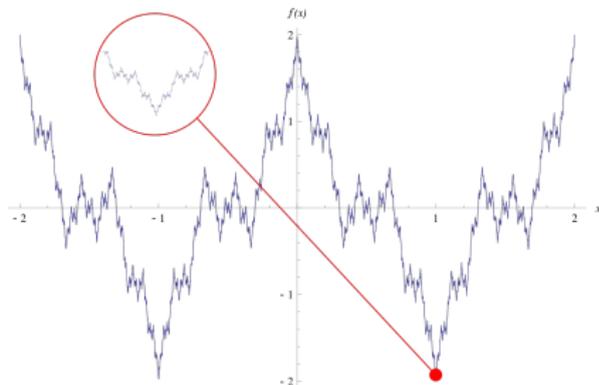
Charles Hermite (1893): *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.*



## Weierstraß-Funktion

Karl Weierstraß (1872): 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

mit  $0 < a < 1$ ,  $b$  ganz und ungerade, und  $ab > 1 + 3\pi/2$ :



Überall stetig, **nirgendwo** differenzierbar!

Charles Hermite (1893): *Mit Furcht und Schrecken wende ich mich ab von diesem beklagenswerten Übel der Funktionen ohne Ableitungen.*



In einem Artikel vom 1926 stellte Lewis Fry Richardson die Frage, ob der Wind überhaupt eine wohldefinierte Geschwindigkeit besitzt.

§ 1.2. *Does the Wind possess a Velocity ?*

This question, at first sight foolish, improves on acquaintance. A velocity is defined, for example, in Lamb's 'Dynamics' to this effect: Let  $\Delta x$  be the distance in the  $x$  direction passed over in a time  $\Delta t$ , then the  $x$ -component of velocity is the limit of  $\Delta x/\Delta t$  as  $\Delta t \rightarrow 0$ . But for an air particle it is not obvious that  $\Delta x/\Delta t$  attains a limit as  $\Delta t \rightarrow 0$ .

We may really have to describe the position  $x$  of an air particle by something rather like Weierstrass's function,

say,

$$x = kt + \sum_n \left(\frac{1}{5}\right)^n \cos(5^n \pi t),$$

Er argumentierte, dass die Funktion, die die Lage eines Moleküls im Wind beschreibt, **keine Ableitung** hat. Deswegen macht es Sinn, von einer **Durchschnittswindgeschwindigkeit** zu reden, kaum aber von einer **momentanen** Windgeschwindigkeit.



- ▷ Trajektorien von einem (möglicherweise chaotischen) stetigen dynamischen System, das im 3D-Raum operiert, schneiden eine (passende) 2D-Fläche. Koordinaten einanderfolgender Schnittpunkten einer Phasenbahn mit dieser Fläche sind durch eine zweidimensionale (Poincaré-) Abbildung der Schnittfläche in sich verbunden  $\{x_n, y_n\} \leftrightarrow \{x_{n+1}, y_{n+1}\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Durch die Konstruktion ist diese Abbildung **stetig, differenzierbar und umkehrbar (Diffeomorphismus)**.

- ▷ Bei Abbildungen spielt **Jacobian** (die Determinante der Jacobi-Matrix),

in 2D ist es  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i} \end{vmatrix}$ , eine ähnliche Rolle

wie  $\text{div } \vec{F}$  bei den Systemen mit der kontinuierlichen Zeit:

für eine Wolke der Anfangsbedingungen wird der Phasenvolumen bei jeder Iteration der Abbildung mit  $|J|$  multipliziert (siehe Vorlesung 1, Satz von Liouville).

- ▷ Folge: bei  $|J| < 1$  ist die Abbildung **dissipativ**: Phasenvolumen schrumpft, und die asymptotische Grenzmenge (Attraktor) hat Volumen 0.
- ▷ Bei  $|J| = 1$  bleibt Phasenvolumen erhalten; das ist analog zu **konservativer** kontinuierlichen Dynamik mit  $\text{div } \vec{F} = 0$ .



Explizit, als zwei Formeln  $\begin{cases} x_{i+1} = f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = g(x_i, y_i) \end{cases}$  ist so eine Abbildung

meist nicht gegeben: dafür braucht man exakte Lösungen der DGL.

Man kann sie aber modellieren durch verschiedene Ansätze für  $f, g$ .

Sind beide Funktionen  $f$  und  $g$  linear, ist die Lösungsstruktur durchschaubar und einfach. Schon bei quadratischen Funktionen (Polynome 2.Ordnung) bekommt man nichttriviale und merkwürdige Dynamik.

Allgemeine quadratische 2D-Abbildung ist von 12 Koeffizienten abhängig:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i, y_i) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ y_{i+1} &= g(x_i, y_i) = b_0 + b_1x + b_2y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{aligned}$$

Aber wenn wir eine Zusatzbedingung stellen:

Jacobian der Abbildung ist konstant (d.h.  $x$ - und  $y$ -unabhängig),

und geschickt die Koordinaten  $x, y$  linear transformieren,

dann werden 8 dieser Koeffizienten zu Null,

und noch 2 nehmen denselben konstanten Wert (z.B. den Wert 1) an,

so dass schließlich nur 2 freie Parameter bleiben (z.B.  $a_1$  and  $b_1$ ).



Michel Hénon hat in 1976 eine einfache 2D-Abbildung betrachtet:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= b x_i\end{aligned}$$

**Hénon-Abbildung** überführt beide Koordinaten eines Punktes auf der zwei-dimensionalen Ebene in die Koordinaten vom neuen Punkt der Ebene. Sie ist stetig, differenzierbar und umkehrbar.

Determinante von Jacobian für die Hénon-Abbildung ist gleich  $-b$ .

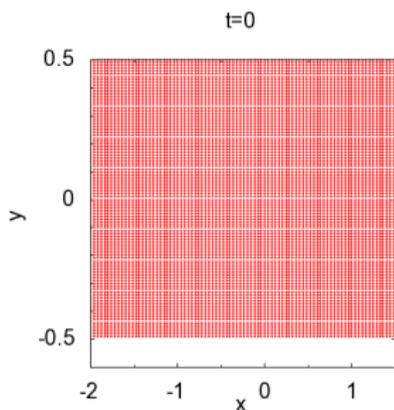


$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= b x_i\end{aligned}$$

Wir fixieren die Parameterwerte  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$ .

Damit ist die Abbildung **dissipativ**,  
dementsprechend dürfte ein Attraktor keine Fläche enthalten.

Wir nehmen ein Ensemble aus  $100 \times 100$  Anfangsbedingungen,  
homogen verteilt auf der Phasenebene,  
und verfolgen numerisch die ersten 20 Iterationen der Abbildung.





$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\y_{i+1} &= b x_i\end{aligned}$$

Wir fixieren die Parameterwerte  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$ .

Damit ist die Abbildung **dissipativ**,

dementsprechend dürfte ein Attraktor keine Fläche enthalten.

Wir nehmen ein Ensemble aus  $100 \times 100$  Anfangsbedingungen,

homogen verteilt auf der Phasenebene,

und verfolgen numerisch die ersten 20 Iterationen der Abbildung.

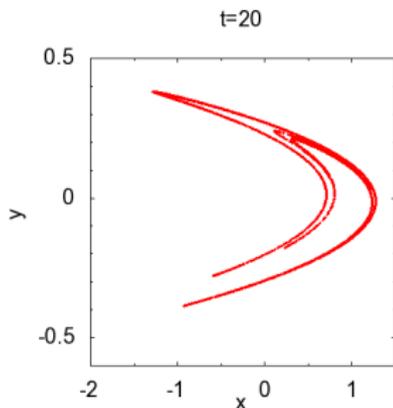


$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= b x_i\end{aligned}$$

Wir fixieren die Parameterwerte  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$ .

Damit ist die Abbildung **dissipativ**,  
dementsprechend dürfte ein Attraktor keine Fläche enthalten.

Wir nehmen ein Ensemble aus  $100 \times 100$  Anfangsbedingungen,  
homogen verteilt auf der Phasenebene,  
und verfolgen numerisch die ersten 20 Iterationen der Abbildung.

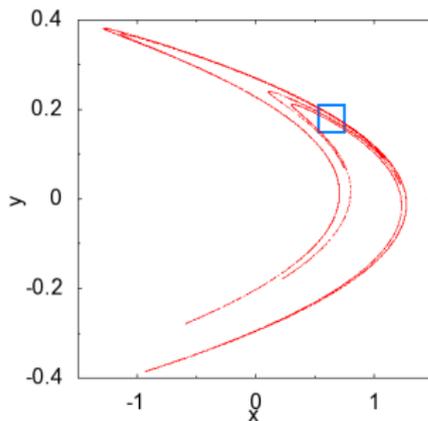


Es bildet sich eine **invariante Menge**:  
Einzelpunkte springen hin und her,  
aber die gesamte Menge bleibt konstant  
an der Stelle.

Das ist der **Hénon-Attraktor**.



Auf den ersten Blick scheint der Attraktor eine gefaltete Kurve zu sein.  
Um seine Struktur zu erkennen, vergrößern wir das Bild mehrmals.





Auf der ersten Blick sieht der Attraktor wie eine gefaltete Kurve aus.  
Um seine Struktur zu erkennen, vergrößern wir das Bild mehrmals.



Jede Linie entpuppt sich nach der Vergrößerung (mit Faktor  $\approx 1.92$ )  
als Ansammlung von dünneren Linien mit leeren Streifen dazwischen,  
jede dieser Linien wird dann zur Ansammlung von noch dünneren Linien usw.

Es entsteht eine **selbst-ähnliche** Struktur

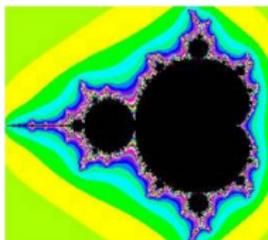
(Produkt vom **Intervall** und einer **Cantor-Menge**),

mit fraktaler Dimension (**box-counting**): **1.261**.



## Dynamische Fraktale

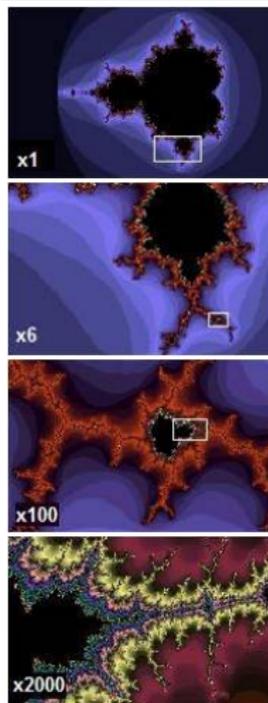
Mandelbrot-Menge entsteht nach der wiederholten Anwendung einer algebraischen Transformation (Abbildung) auf der komplexen Ebene.



$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad (z_0 = 0)$$

Wo liegt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ?

Bei Werten von der komplexen Konstante  $C$  im schwarzen Fleck tendieren die Iterationen gegen Null. Gesamtheit dieser Punkte bildet die *Mandelbrot-Menge*. Bei allen anderen Werten von  $C$  läuft  $z_n$  ins unendliche. Die Grenzen der Mandelbrot-Menge sind *fraktal*.



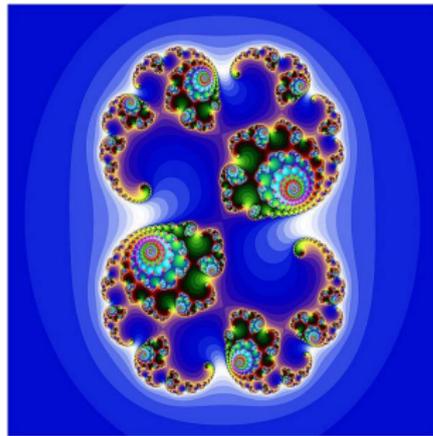
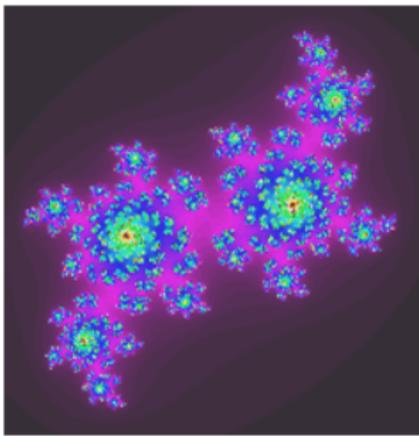


## Dynamische Fraktale Julia-Mengen

Iteration auf der komplexen Ebene:  $z \rightarrow f(z)$  mit  $f(z)$  meromorph

Bei den meisten Punkten der Ebene (die bilden dann eine Fatou-Menge) führt eine kleine Verschiebung des Startpunktes zu keiner nennenswerten Änderung der Iterationsfolge.

Die restlichen Punkten bilden eine Julia-Menge: da führt eine beliebig kleine Änderung des Startpunktes zu komplett verändertem Iterationsverhalten.





Fraktale Dimension  $D$  einer Menge  $M$

charakterisiert diese Menge *rein geometrisch*, “zeitlos”.

Wird aber die Menge  $M$  in einem *zeitlichen Prozess* erkundet, dann ist der Wert von  $D$  nicht unbedingt ausreichend.

Beispiele:

- ▷ Ein Messprozess (*Beobachtungsprozess*): die Messdaten liegen auf  $M$ , bedecken diese Menge aber nicht unbedingt *homogen*: in manchen Bereichen *mehr* Messpunkten, in anderen *weniger*, in den dritten eventuell *gar keine*.
- ▷ Ein dynamisches System: eine Phasentrajektorie liegt ganz auf  $M$ , besucht aber nicht alle Teile von  $M$  *gleichmäßig*: in manchen Bereichen von  $M$  verbringt das System *relativ viel* Zeit, in den anderen *relativ wenig*, manche werden eventuell *gar nicht* besucht.

Falls wir nun die Menge  $M$  mit den Kästchen überdecken, leisten unterschiedliche Kästchen unterschiedliche Beiträge in die Statistik; *aus der Sicht von  $D$  jedoch zählen sie alle gleich*.

Eine *Gewichtung* muss her: jedes Kästchen mit *Wahrscheinlichkeit* ausstatten, dass ein Messpunkt (oder Segment der Phasentrajektorie) in diesem Kästchen liegt.



### Generalisierte Dimensionen $D_q$

Wir überdecken den Raum mit den *nummerierten* Kästchen von Seitenlänge  $\varepsilon$ .

- ▷ Sei  $p_i$  Wahrscheinlichkeit, dass  $i$ -tes Kästchen sich mit dem untersuchten Objekten (geometrische Struktur, Messdaten, Phasentrajektorie...) überschneidet.
- ▷ Wir bilden für ein reelles  $q$  die Summe  $\sum_{p_i \neq 0} p_i^q$  über alle *nicht leere* Kästchen

Warum nicht leere? Um auch *negative* Werte von  $q$  zu erfassen!

$$\frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{p_i \neq 0} p_i^q}{\ln \varepsilon}$$

- ▷ Die generalisierte Dimension  $D_q$  definiert sich als
- ▷  $q=0 \Rightarrow D_0 (= D)$ : Kapazitätsdimension;  $q=2 \Rightarrow D_2$ : Korrelationsdimension;

$$q=1 \text{ (mit l'Hospital): } D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon} : \text{ Informationsdimension .}$$

- ▷ Aus  $q_1 > q_2$  folgt  $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ .  $\implies D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots$
- ▷ Falls alle  $D_q$  gleich  $\implies$  das untersuchte Objekt wird *monofractal* genannt, sonst heißt es *multifractal*.