

Vorlesung 12.

Stabilität periodischer Lösungen. Floquet-Theorie. Poincaré-Abbildung.



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2.$$

Periodische Lösung mit Periodendauer T : $\mathbf{x}^{(p)}(t) = \mathbf{x}^{(p)}(t + T)$,
so dass $\mathbf{x}^{(p)}(t) \neq \mathbf{x}^{(p)}(t + \tau) \quad \forall \tau < T$.

*Bevor eine Stabilitätsanalyse möglich wird, muss man beides:
sowohl $\mathbf{x}^{(p)}$ wie auch den Wert von T kennen.*

*Die sind meist nicht vorgegeben, und (falls überhaupt) nur numerisch zugänglich.
Wir setzen aber jetzt voraus,
dass uns die Lösung und die Periodendauer schon (vorläufig) bekannt sind.*

Schicksal der (kleinen) Störungen entscheidet sich
auf der Zeitskala von T .

Zwei Zugänge:

- ▶ *analytisch* und
- ▶ *geometrisch* (qualitativ).

Floquet-Theorie (nach Gaston Floquet)

▷ kleine Störung: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(p)}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$

▷ Taylor-Entwicklung (komponentenweise):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(p)}(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}^{(p)}(t)) + \sum_j \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(p)}(t)} \tilde{x}_j(t) + O(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$$

▷ Jacobi-Matrix ist zeitabhängig
und wird an der periodischen Lösung $\mathbf{x}^{(p)}(t)$ berechnet.

▷ Linearisierung: $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_j \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \tilde{x}_j(t)$

▷ $\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$:

homogene lineare DGL mit periodischen Koeffizienten.

Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung N
mit periodischen Koeffizienten.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Allgemein gibt es N linear unabhängiger Lösungen:

$$\mathbf{x}^1(t) = \{x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_N^1(t)\}$$

$$\mathbf{x}^2(t) = \{x_1^2(t), x_2^2(t), \dots, x_N^2(t)\}$$

...

$$\mathbf{x}^N(t) = \{x_1^N(t), x_2^N(t), \dots, x_N^N(t)\}$$

Zusammen bilden sie eine **Fundamentalmatrix**:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{x}^1(t) \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \mathbf{x}^N(t) \end{bmatrix} \right]$$

Wir wählen die linear unabhängigen Lösungen so aus,
dass sie zu $t=0$ einer Einheitsmatrix $\mathbf{E}_N$ entsprechen: $\tilde{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{E}_N$.



Floquet-Theorie

homogene lineare DGL der Ordnung N
mit periodischen Koeffizienten.

Matrix-DGL: $\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{X}}(t)$ mit $A(t+T) = A(t)$.

Floquet: Es existiert eine konstante (t -unabhängige) Matrix $\mathbf{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{\mathbf{X}}(t+T) = \tilde{\mathbf{X}}(t) \mathbf{C}$.

($t=0$ einsetzen) $\Rightarrow \tilde{\mathbf{X}}(T) = \tilde{\mathbf{X}}(0) \mathbf{C} = \mathbf{E}_N \mathbf{C} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{X}}(T)$,
 $\mathbf{C}$ ist Ergebnis der Evolution einer Einheitsmatrix nach einer Periode T .

Diese $N \times N$ Matrix $\mathbf{C}$ heißt *Monodromie-Matrix*.

$\mu\nu\omicron\varsigma$: einzig, $\delta\rho\omicron\mu\omicron\varsigma$: Rennstrecke

Deren Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_N$ werden *Floquet-Multiplikatoren* genannt.

Da $\mathbf{C}$ eine reelle Matrix, sind μ_j entweder reell,
oder paarweise komplex-konjugiert.

Spur einer Matrix ist Summe ihrer Eigenwerte $\Rightarrow \text{Sp}(\mathbf{C}) = \sum_j^N \mu_j$

Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{X}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Floquet: Es existiert eine konstante (t -unabhängige) Matrix $\mathbf{C}$,
so dass $\forall t$ gilt: $\tilde{\mathbf{X}}(t+T) = \tilde{\mathbf{X}}(t) \mathbf{C}$.

Wir nehmen eine spezielle Anfangsstörung $\tilde{\mathbf{y}}(0)$, die einem Eigenvektor der Matrix $\mathbf{C}$ mit dem Eigenwert (*Multiplikator*) μ_i entspricht.

Dann: $\tilde{\mathbf{y}}(T) = \tilde{\mathbf{y}}(0) \mathbf{C} = \mu_i \tilde{\mathbf{y}}(0)$.

Weiter: $\tilde{\mathbf{y}}(2T) = \tilde{\mathbf{y}}(T) \mathbf{C} = \mu_i^2 \tilde{\mathbf{y}}(0)$ und allgemein $\tilde{\mathbf{y}}(nT) = \mu_i^n \tilde{\mathbf{y}}(0)$.

Nach jeder Periode T wird die Störung mit dem Eigenwert μ_i multipliziert (daher *Multiplikator*).

Bei einem **komplexen** μ_i wird die Störung nicht nur mit Faktor $|\mu_i|$ gestreckt bzw. gekürzt:
sie dreht sich im Phasenraum um den Winkel $\text{Arg}(\mu_i)$.

Floquet-Theorie

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{X}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Superpositionsprinzip: Eine allgemeine Anfangsstörung kann an die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{C}$ projiziert werden. Dann wird die k -Komponente der Störung ($k = 1, \dots, N$) nach jeder neuen Periode T mit dem Eigenwert μ_k multipliziert.

$\Rightarrow$ **Stabilitätsbedingung:** damit keine Störung wächst, muss $\forall i$ die Ungleichung $|\mu_i| \leq 1$ gelten:
keine Floquet-Multiplikatoren außerhalb des Einheitskreises.

Floquet-Theorie

Betrachten wir nun die Evolution einer **besonderen Anfangsstörung** der periodischen Referenz-Lösung:

$$\tilde{x}(0) = f(x^{(p)}(0)) \cdot \delta t \quad \text{mit hinreichend kleinem } \delta t.$$

Sie liegt direkt auf der Bahnkurve der ungestörten Referenz-Lösung und ist nichts anderes als eine **Verschiebung** entlang der Bahn.

Damit läuft die gestörte Lösung die ganze Zeit entlang der (periodischen!) Referenz-Kurve, und nach dem Zeitintervall T ist sie wieder $\tilde{x}(0)$: weder gewachsen noch geschrumpft.

Da diese Störung nach einer Periode T **exakt** zu ihrem Anfangszustand zurückfindet, ist sie **neutral**.

Da die Störungsamplitude sich nach der Zeit T nicht ändert, ist entsprechender Multiplikator gleich **1**.

Damit ist bei **autonomen** Systemen ein Multiplikator **immer** gleich **1**: er entspricht einer Störung entlang der ursprünglichen periodischen Bahn (tangentielle Störung).

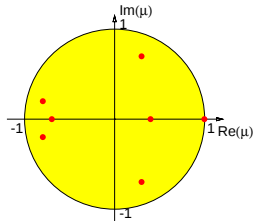
Neutrale Störung folgt aus der **Zeitunabhängigkeit** der Gleichungsform: ein autonomes System ist invariant bezüglich der Zeitverschiebung.

Floquet-Theorie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(p)}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad \text{mit} \quad A(t+T) = A(t).$$

Eine **stabile** periodische Lösung $\mathbf{x}^{(p)}(t)$:
es liegen keine Multiplikatoren
außerhalb des Einheitskreises.

Bei Stabilitätsverlust durchqueren
ein (reeller) oder zwei (komplex-konjugierte)
Multiplikatoren den Einheitskreis.



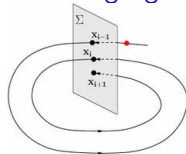
Qualitativ, gibt es dazu drei generische Möglichkeiten:

- Ein reeller Multiplikator, $\mu = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\mu = -1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\mu = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \neq \pi n$.



Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang

Einer periodischen Lösung entspricht im N -dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.

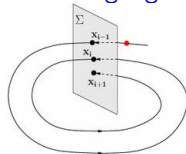


- ▶ Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N - 1)$ -dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve **transversal** schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- ▶ Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche **lokale** Koordinaten $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:
$$\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}_k \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}_{k+1}$$
- ▶ Ein Satz von $N-1$ Zahlen wird in einen anderen Satz von $N-1$ Zahlen überführt durch eine **umkehrbare, stetige und differenzierbare** Abbildung:
Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), *return mapping*.
- ▶ Iterationen dieser Abbildung entsprechen zeitlicher Evolution entlang einer Bahnkurve des ursprünglichen System. Eigene "Zeit" der Abbildung wird ganzzählig: Anzahl der Iterationen k .

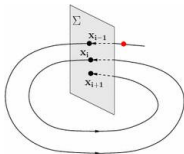


Stabilität von periodischen Lösungen: geometrischer Zugang

Einer periodischen Lösung entspricht im N -dimensionalen Phasenraum eine geschlossene Bahnkurve.



- ▶ Im beliebigen Punkt dieser Kurve wird eine $(N - 1)$ -dim. Hyperfläche ausgewählt, die die Kurve **transversal** schneidet. Das System verläßt die Fläche entlang der Bahn und kommt wieder zurück.
- ▶ Wegen Stetigkeit, kommen alle benachbarten Bahnen ebenso auf die Fläche zurück. Führt man auf der Fläche **lokale** Koordinaten $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ ein, so entsteht (durch den Phasenfluß induziert) eine eindeutige Relation zwischen den Koordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrpunkten:
$$\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}_k \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}_{k+1}$$
- ▶ Ein Satz von $N-1$ Zahlen wird in einen anderen Satz von $N-1$ Zahlen überführt durch eine **umkehrbare, stetige und differenzierbare** Abbildung:
Rückkehrabbildung (Poincaré Abbildung), return mapping.
- ▶ Die “echte” zeitliche Dauer der Iteration (*also, die Periodendauer T in ursprünglichen Zeiteinheiten!*) spielt dabei keine Rolle; wir nehmen nur an, dass sie beschränkt bleibt.



Poincaré-Abbildung überführt in sich die Koordinaten auf einer $(N-1)$ -dimensionalen Ebene.

Eine periodische Lösung (geschlossene Bahnkurve) im System mit kontinuierlicher Zeit liefert einen Fixpunkt von Poincaré-Abbildung.

Linearisierung von der Rückkehrabbildung am Fixpunkt, der der periodischen Lösung entspricht: wir berechnen die $(N-1) \times (N-1)$ Jacobi-Matrix der Abbildung an diesem Punkt.

Die $N-1$ Eigenwerte dieser Matrix sind die (uns schon bekannten) Floquet-Multiplikatoren.

Einer fehlt: es ist Eigenwert 1: er charakterisiert Störungen entlang der stetigen Bahnkurve, also transversal zur Poincaré-Ebene.

Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**,
falls für alle $N-1$ Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Bei Stabilitätsverlust durchqueren ein (**reeller**) oder zwei (**komplex-konjugierte**)
der Eigenwerten den Einheitskreis.

Dabei gilt **Zentrumsmanigfaltigkeitssatz**:

$N-1$ -dimensionale Dynamik reduziert sich auf eine n -dimensionale Abbildung;
 n ist Anzahl von relevanten Eigenwerten.

- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = 1 \Rightarrow n = 1$.
- Ein reeller Multiplikator, $\lambda = -1 \Rightarrow n = 1$.
- Ein Paar komplexer Multiplikatoren, $\lambda = e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \neq \pi k \Rightarrow n = 2$.

Damit ergeben sich **3** unterschiedliche typische Arten von Stabilitätsverlust.

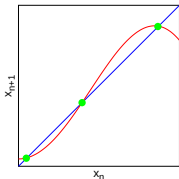


Eindimensionale Abbildungen: allgemeine Merkmale

$$x \rightarrow f(x), \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Graphische Darstellung.

Zusammen mit dem Graph der Funktion $f(x)$,
wird oft auch die **Winkelhalbierende** geplottet:
deren Schnittpunkte mit $f(x)$ sind Fixpunkte der Abbildung,
sie entsprechen der periodischen Bahnkurven im kontinuierlichen System.



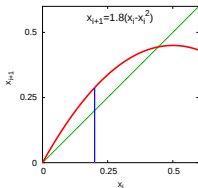
Stabilität vom Fixpunkt x_p : $f(x_p + \delta) \approx f(x_p) + f'(x_p) \delta = x_p + f'(x_p) \delta$

Multiplikator: Steigung $f'(x_p)$ der Kurve im Fixpunkt.

Stabilitätsbedingung: $|f'(x_p)| \leq 1$.

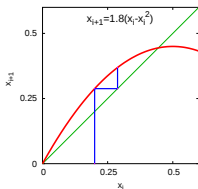


Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



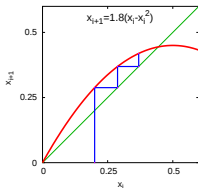


Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



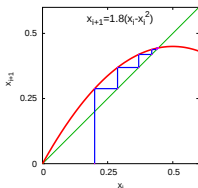


Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)

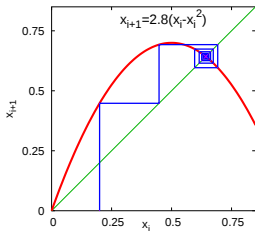




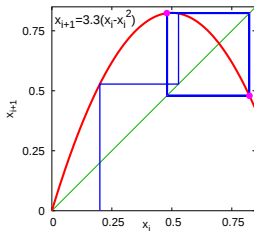
Lémeray-Diagramm (Spinnwebdiagramm, cobweb plot)



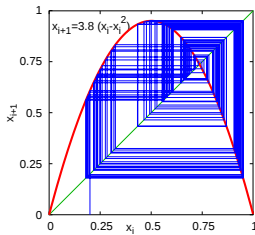
monotone Konvergenz zum stabilen Fixpunkt



oszillatorische
Konvergenz



Konvergenz zum
Zyklus mit Periode 2



aperiodische
Iterationssequenz



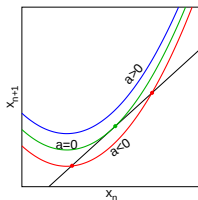
Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**, falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei **1** Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Laut dem **Zentrumsmanigfaltigkeitssatz** wird Dynamik auf eine eindimensionale Abbildung reduziert.

Normalform: $x_{n+1} = x_n + a + x_n^2$, $f'(x) = 1 + 2x$

- ▶ $a > 0$: keine Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden $\Rightarrow$ **keine** Fixpunkte.
- ▶ $a = 0$: **ein** neutraler ($f'(x)=1$) Fixpunkt bei $x = 0$.
- ▶ $a < 0$: **zwei** Fixpunkte (instabiler und stabiler) bei $x = \pm\sqrt{-a}$.



Beim durchqueren des Werts $a = 0$ werden zwei Fixpunkte geboren/vernichtet. Diese Bifurkation wird oft **tangent bifurcation** genannt, wegen der Berührung von $f(x)$ mit der Winkelhalbierenden bei $a = 0$.

Im ursprünglichen zeit-kontinuierlichen System ist es eine

Sattel-Knoten Bifurkation von periodischen Lösungen:

zwei geschlossene Phasenbahnen stoßen aufeinander (entlang der ganzen Länge) und verschwinden.



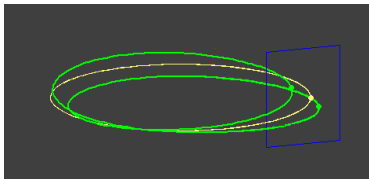
Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix
am Fixpunkt der Poincaré-Abbildung gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei -1 Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Die Störung, die auf dem entsprechenden Eigenvektor liegt,
ändert ihr Vorzeichen nach einem Umlauf im Phasenraum.

Nach dem zweiten Umlauf, ändert sich das Vorzeichen wieder:

$\Rightarrow$ ursprüngliche Störung wird wiederhergestellt.



So entsteht im Phasenraum eine Trajektorie, die sich
nach **zwei** Runden schließt und eine **verdoppelte** Periodendauer hat.
Das ist eine **Periodenverdopplungsbifurkation** (period-doubling, flip).



Periodische Lösung ist **asymptotisch stabil**,
falls für alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix gilt: $|\lambda| < 1$.

Sei $e^{\pm i\theta}$ Eigenwert von der Jacobi-Matrix.

Die entsprechende neutrale Störung wird nach einem Umlauf
weder größer noch kleiner im Betrag (Amplitude),
aber sie dreht sich um den Winkel θ (**Phasendrehung**).

So, nach und nach, entsteht auf der Poincaré-Ebene ein invarianter Kreis;
falls $\theta = 2\pi m/n$, schließt sich die Trajektorie
nach n Iterationen der Abbildung (und m Umdrehungen um den Kreis),
sonst bedeckt sie den ganzen Kreis dicht.

Einem invarianten Kreis auf der Poincaré-Ebene
entspricht im Phasenraum eine schlauchartige Oberfläche:
ein **zwei-dimensionaler Torus**.

Geburt von einem Torus aus einem Grenzyklus
wird **Neimark-Sacker-Bifurkation** genannt.

